ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK
UND IHRE GRENZGEBIETE
7. Band, Heft 4 S. 145—192

Geschichtliches.

Neugebauer, O.: Das Pyramidenstumpf-Volumen in der vorgriechischen Mathematik. Quell. Stud. Gesch. Math. B **2**, 347—351 (1933).

Schott, A.: Zur Terminologie der mathematischen Keilschrifttexte. I. ki ma-ṣi. Quell. Stud. Gesch. Math. B **2**, 364—368 (1933).

Es wird die Bedeutung eines ursprünglich (irrtümlich) für die Aufgaben mit Progressionen als charakteristisch angesehenen Terminus näher analysiert.

O. Neugebauer (Göttingen).

● **Stenzel, Julius: Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. 2. erw. Aufl.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1933. VIII, 188 S. RM. 10.—.

Die neuere Entwicklung der Erschließung des mathematischen Denkens der Antike bewegt sich vor allem in drei Richtungen: 1. Entstehungsgeschichte der Proportionenlehre und Irrationalzahltheorie (Euklid V und X) in der Zeit Platons (Theaetet, Eudoxos); 2. Pythagoreer-Frage (Gesamtdarstellung: Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle 1923); 3. Bedeutung und Einfluß der vorgriechischen Mathematik. Das vorliegende Werk, das 1924 in erster Auflage erschien, hat einen der wesentlichsten Impulse in der erstgenannten Richtung gegeben, hat aber auch wichtige Beziehungen zur zweiten. Zwar ist sein unmittelbares Ziel keineswegs ein der Gesch. d. Math. angehöriges; es will zur Klärung der platonischen Ideenlehre, insbesondere in ihrer späten Gestalt, beitragen und gleichzeitig die Polemik des Aristoteles gegen sie verstehen. Der Ausweg, einerseits von einer nicht mehr ganz ernst zu nehmenden „Altersphilosophie" Platons zu sprechen, andererseits Aristoteles ein „Nichtverstehen" dessen, was Platon eigentlich meinte, zuzuschieben, wird hier nicht eingeschlagen. So ergibt sich die Notwendigkeit, gerade jenen Punkt zu erörtern, der im Mittelpunkt von Theorie wie Polemik steht: die „Ideenzahlen". Es zeigt sich, daß man damit an zentraler Stelle die Frage nach der Rolle des Mathematischen für die platonische und frühgriechische Philosophie überhaupt aufzurollen hat, und in dieser Richtung hat Stenzels Buch den entscheidenden Anstoß gegeben, dem sich dann die Arbeiten von Taylor, Toeplitz, Becker u. a. angeschlossen haben. Die 2. Aufl. hat sowohl im Text wie in ausführlichen Nachträgen zu diesen Arbeiten Stellung genommen. — Es ist hier leider räumlich unmöglich, die Grundgedanken der Stenzelschen Untersuchung auch nur zu skizzieren. Nur auf einige Punkte sei kurz hingewiesen. Die entscheidende Rolle spielt die Diskussion der Methode der „Diairesis", ein formales Schema der Begriffsspaltung (vgl. etwa S. 11), das wohl zunächst als logisches Schema zur Begriffsabgrenzung und Definition gedacht war, dann aber als ordnendes Prinzip innerhalb von drei Bereichen erkannt wird: im Bereich der Ideen, dem der Zahlen und dem des Räumlichen. Der Isomorphismus der so gewonnenen Strukturen spielt dann für Platons Lehre durch eine eigentümliche Identifikation isomorpher Gebilde eine ganz wesentliche Rolle. Dabei ist naturgemäß der Bereich der Zahlen ausgezeichnet, da sie sich am unmittelbarsten (nach einem ungefähr als dyadische Darstellung zu charakterisierenden Schema) gesetzmäßig ordnen lassen. Diese Zahlen (und hiergegen wendet sich gerade die Polemik des Aristoteles) sind aber für Platon nicht die „vergleichbaren" (gleichberechtigten, homogenen) Zahlen der Mathematik, sondern sozusagen Individualzahlen, die durch zwei Prinzipien ἕν und δυάς gegliedert werden. (Der Anlaß für diese uns heute so merkwürdig vorkommende Betrachtungsweise scheint mir nicht, wie St. es versucht, aus der geometrischen Repräsentierung der Zahlen (etwa als figurierte Zahlen) herzustammen, als vielmehr aus sprachpsychologischen Motiven, deren Wirkung sich auch außerhalb des Griechischen, z. B. in der ägyptischen Mathematik ganz deutlich nachweisen läßt.) Die Übertragung einer solchen Strukturtheorie auf das Räumliche führt nun wieder auf Dinge hin, die mit der Ausbildung grundlegender mathematischer Begriffe eng verbunden sind: die Frage nach dem Wesen des Kontinuierlichen, nach der atomistischen Struktur des Räumlichen („unteilbare Linien"). Hier liegen, wie mir scheint, noch weite ganz unerforschte Gebiete (so die Frage des Verhältnisses von Demokritischem zu Platonischem Atomismus), die mit dem Entstehen der Exhaustionsmethoden, Eudoxischem („Archimedischem") Axiom usw. aufs engste zusammenhängen. Auch hier wird die Stenzelsche Untersuchung, die wie kaum eine zweite die enge Verbindung zwischen den wesentlichsten Fragen der griechischen Mathematik und Philosophie erwiesen hat, einmal den Ausgangspunkt bilden können. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Toeplitz, Otto: Die mathematische Epinomisstelle. Quell. Stud. Gesch. Math. B **2**, 334—346 (1933).

Übersetzung und Interpretation einer schwierigen Partie des (pseudoplatonischen) Dialoges Epinomis, die, wie sich jetzt zeigt, nicht nur Anspielungen auf die bekannte griechische Irrationalzahltheorie enthält, sondern auch die ganz neue Tatsache erweist, daß man in voreuklidischer Zeit auch eine Theorie der kubischen Irrationalitäten aufzustellen versucht hatte. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Becker, Oskar: Eudoxos-Studien. I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. Quell. Stud. Gesch. Math. B **2**, 311—333 (1933).

Aus einer Stelle der Topik des Aristoteles (Θ 3, 158b 29—35) und ihrer Erklärung durch Alexander von Aphrodisias (545, 9—17 Wallies) erfahren wir, daß die „Alten" die Proportionalität von Größen definiert hatten durch die Gleichheit der *ἀνταναίρεσις*, wie Aristoteles sagt, oder *ἀνθυφαίρεσις*, wie der Kommentator den aristotelischen Ausdruck in die zu seiner Zeit übliche Terminologie umsetzt. Das Verbum *ἀνθυφαιρεῖν* (= wechselweise wegnehmen) wird in den Elementen des Euklid am Anfange des 7. und am Anfange des 10. Buches bei der Erörterung des „Euklidischen" Algorithmus zur Bestimmung des gr. gem. Teilers zweier ganzer Zahlen bzw. des gr. gem. Maßes zweier gleichartiger Größen gebraucht. Der Sinn der von Aristoteles angeführten Definition ist demnach: Die Proportion $a : b = c : d$ soll besagen, daß bei Ausführung des Euklidischen Algorithmus das Größenpaar a, b und das Größenpaar c, d dieselbe Quotientenkette ergibt, oder modern ausgedrückt, daß die Entwicklungen der Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ in regelmäßige Kettenbrüche übereinstimmen. Diese Interpretation der genannten Textstellen hatte zwar schon Zeuthen 1917 gegeben, Verf. hat sie aber vor einem Jahre ohne Kenntnis der Zeuthenschen Arbeit wiedergefunden und aus ihr weitgehende Folgerungen für die Entstehungsgeschichte des mathematischen Inhalts der Elemente Euklids gezogen. — Die These des Verf. ist, daß vor der Gestalt der Proportionenlehre, wie wir sie heute in Elemente 5 lesen und die wahrscheinlich die Leistung des Eudoxos ist, eine ältere auf der antanhairetischen Definition aufgebaute Proportionenlehre vorhanden gewesen sei. Er rekonstruiert diese, indem er mit größter Sorgfalt und Kritik jeden einzelnen Satz aus Elem. 5 auf seine Beweisbarkeit auf Grund der antanhairetischen Definition hin prüft, wobei sich die Sätze naturgemäß in Gruppen von verschiedenem Verhalten scheiden. Insbesondere zeigt sich u. a., daß diejenigen Sätze aus Buch 5, bei denen die (multiplikative) Zusammensetzung von Verhältnissen in Frage kommt, sich auf Grund der antanhairetischen Definition nicht für Verhältnisse zwischen allgemeinen Größen, sondern nur für solche zwischen besonderen Größenarten ergreifen lassen. Dadurch fällt zugleich ein neues Licht auf die berühmte Stelle der 2. Analytik, 1. Buch, Kap. 5, wo Aristoteles vom *ἐναλλάξ* und dem Fehlen eines Namens zur Zusammenfassung der verschiedenen Größenarten spricht. Weiter weist Verf. nach, daß sämtliche übrigen Bücher der Elemente nirgends die heutige Gestalt von Buch 5 voraussetzen, und er führt auch eine Reihe positiver Gründe für ihre Unabhängigkeit von Buch 5 an. Die mathematische Überlegenheit der Eudoxischen Theorie über die ältere sei von den griechischen Mathematikern nicht einmal voll ausgenutzt worden und der Vorzug der Eudoxischen Theorie liege „auf rein logischem, gewissermaßen philosophisch-akademischem Gebiet". *Bessel-Hagen* (Bonn).

Becker, Oskar: Eudoxos-Studien. II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen? Quell. Stud. Gesch. Math. B **2**, 369—387 (1933).

Die Exhaustionsbeweise im 12. Buch der Elemente Euklids benutzen stillschweigend die Voraussetzung, daß zu drei Größen einer Größenart stets eine vierte Proportionale derselben Größenart existiert. Diese Voraussetzung kann, wie von Hasse und Scholz bemerkt worden ist, aus dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom für geometrische Größen gefolgert werden, nach dem „jeder (Dedekindsche) Schnitt in einem vollständigen System homogener geometrischer Größen . . . durch eine Größe des Systems erzeugt wird". In der vorliegenden Arbeit versucht Verf. zu zeigen, daß dieses Dedekindsche Axiom (entgegen der verbreiteten, insbesondere von Dedekind selbst vertretenen Auffassung) in der antiken Mathematik tatsächlich formuliert worden ist. Die direkten Quellen hierzu sind zwar spätantik (5. Jhdt. n. Chr. und später), sie knüpfen aber an den alten Kreisquadraturversuch des Pythagoreers Bryson an (5. Jhdt. v. Chr.) und gewähren daher wahrscheinlich einen Einblick in Gedanken der vor-Eudoxischen Zeit. — Zunächst interpretiert Verf. die Berichte über die Kreisquadratur des Bryson dahin, daß Bryson den Gedanken des Schnittes (innerhalb eines linear geordneten Größengebietes) gefaßt und die Eindeutigkeit des Schnitts (alles, was denselben Schnitt erzeugt, ist gleich) als Axiom postuliert habe, freilich über die Existenz eines den Schnitt hervorrufenden Elements hinweggeglitten sei. Damit hat er Bryson als ernst zu nehmenden Forscher rehabilitiert, während bisher die Historiker der Mathematik den Brysonschen Quadraturversuch als eine Lächerlichkeit abzutun pflegten. Die Existenzfrage findet sich nun ein-

gehend bei Proklos und seinen Nachfolgern erörtert, wo mit aller Klarheit unter gewissen Einschränkungen die Existenz eines den Schnitt erzeugenden Elementes als Axiom hingestellt wird. Dabei springt mit verblüffender Deutlichkeit in die Augen, daß die antike Mathematik den uns heute wieder so interessierenden Unterschied zwischen abstrakter Existenz und Existenz infolge Konstruierbarkeit genau gekannt hat. Hinsichtlich des Umfangs der erwähnten Einschränkungen herrscht bei den Autoren (Proklos, Ammonios, Philoponos, Simplikios) keine Einigkeit: Verlangt wird gemeinsam, daß die das Größengebiet aufbauenden Größen homogen seien, aber über den Begriff „homogen" gehen die Meinungen auseinander. Die Erörterungen darüber drehen sich um das Beispiel der hornförmigen Winkel herum. Verf. legt die einschlägigen Textstellen vor mit einem Kommentar, durch den ihr Sinn überhaupt erst zugänglich wird. Das Endergebnis der ganzen Untersuchungen ist, daß die Griechen darum an die Existenz eines dem Kreise flächengleichen Quadrats geglaubt hätten, „weil die dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygone ein in doppelter Richtung archimedisches System bilden" und sie der Meinung gewesen seien, daß in einem solchen System das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom (s. oben) gültig sei. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Lidonnici, Alfonso: Il teorema di Pitagora nell'antica Grecia. Period. Mat., IV. s. **13**, 193—211 (1933).

Rome, A.: Les explications de Théon d'Alexandrie sur le théorème de Ménélas. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **53**, 39—50 (1933).

An Hand des Theonschen Kommentars wird der Beweis des genannten Theorems im Almagest sehr sorgfältig diskutiert und der Standpunkt vertreten, daß die von Theon bemerkte Lücke des Beweises (Ausartung des Transversalen-Hilfssatzes durch Parallelität) bereits in den Ptolemäus vorliegenden Fassungen des Menelaos offen gelassen war. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Ver Eecke, Paul: La mécanique des grecs d'après Pappus d'Alexandrie. Scientia **54**, 114—121 (1933).

Loria, G.: Considerazioni e notizie intorno alla storia delle matematiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 768—775 (1933).

Kurzer Literaturbericht über neuere Arbeiten. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Nova Kepleriana. Wiederaufgefundene Drucke und Handschriften von Johannes Kepler. Hrsg. v. Walther von Dyck. VII. Prognostikum auf das Jahr 1620. Bearb. v. Max Caspar u. Walther von Dyck. Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. **17**, 1—58 (1933).

Nova Kepleriana. Wiederaufgefundene Drucke und Handschriften von Johannes Kepler. Hrsg. v. Walther von Dyck. V. Keplerbriefe auf der Braunschweigischen Landesbibliothek in Wolfenbüttel. I. Tl. Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. **18**, 1—58 (1933).

Sehr wichtige und sorgfältig kommentierte Ausgabe von Briefen Keplers an Maestlin (und eine Antwort) insbesondere betreffend das „Mysterium cosmographicum", in dessen Entstehungsgeschichte sie z. T. ganz neue Einblicke vermitteln. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Bortolotti, Ettore: La matematica in Italia nel secolo XVI. Bull. Sci. histor. **1933**, 268—283.

Peters, Theodor: Christian Otter, Befestigungslehre. (Rationale Streckenteilung.) Quell. Stud. Gesch. Math. B **2**, 352—363 (1933).

Es wird gezeigt, wie sich hinter den symmetrischen Befestigungskonstruktionen Otters (Königsberg, 17. Jahrh.) das Problem der rationalen Streckenteilung unter gewisser Einschränkung der Konstruktionsmittel verbirgt. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Leland Locke, L.: The contributions of Leibniz to the art of mechanical calculation. Scripta Math. **1**, 315—321 (1933).

● **Winter, E.: Bernard Bolzano und sein Kreis.** Leipzig: J. Hegner 1933. 288 S. Geb. RM. 6.50.

Gliozzi, Mario: Studio comparativo delle teorie elettriche del Nollet, del Watson e del Franklin. Archeion **15**, 202—215 (1933).

Algebra und Zahlentheorie.

Gonzalez, M. O.: Übersicht über die Theorie der verallgemeinerten Rationalzahlen. Bol. mat. **6**, 1—8 (1933) [Spanisch].

Der Begriff der rationalen Zahl in der Auffassung als Zahlenpaar wird verallgemeinert auf Systeme von n ganzen rationalen Zahlen, deren letzte nicht Null sein darf. Addition und Multiplikation dieser Systeme werden auf geeignete Weise erklärt und das Weiterbestehen der für diese Verknüpfungen grundlegenden Rechengesetze nachgewiesen. — Es ist übrigens leicht zu überblicken, daß der Bereich der verallgemeinerten Rationalzahlen des Verf. isomorph ist mit einem einfach gebauten Ring hyperkomplexer Zahlen mit $n-1$ Einheiten. *K. Pingitzer* (Wien).

● **Hilbert, David: Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. Algebra. — Invariantentheorie. — Geometrie.** Berlin: Julius Springer 1933. VIII, 453 S. u. 12 Abb. RM. 45.—.

Der Band enthält 26 algebraische und invarianten-theoretische Arbeiten mit einem Nachwort des Ref. sowie 3 geometrische Arbeiten mit einem Vorwort von A. Schmidt über Hilberts Grundlegung der Geometrie. Die „Grundlagen der Geometrie" selbst sowie die als Anhänge I—IV darin aufgenommenen Arbeiten werden nicht in den „Werken" abgedruckt. Hervorzuheben sind die großen invariantentheoretischen Arbeiten über die Theorie der algebraischen Formen und über die vollen Invariantensysteme. Von den übrigen algebraischen Arbeiten seien die über definite Formen, über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen und über die Gleichung neunten Grades erwähnt. *van der Waerden* (Leipzig).

Fousianis, C.: Sur les racines des équations algébriques. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 794—797 (1933).

Es wird im wesentlichen der folgende Satz bewiesen: Die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + a_{n_1} x^{n_1} + \cdots + a_{n_k} x^{n_k} = 0 \quad (a_p \neq 0, p < n_1 < \cdots < n_k$$

hat mindestens eine Wurzel, deren absoluter Betrag nicht größer ist, als der kleinste der absoluten Beträge der Wurzeln in der Gleichung

$$g(x) = n_1 n_2 \ldots n_k a_0 + (n_1 - 1) \ldots (n_k - 1) a_1 x + \cdots + (n_1 - p) \ldots (n_k - p) a_p x^p = 0 .$$

Die Gleichung $f(x) = 0$ hat also mindestens eine Wurzel, deren absoluter Betrag höchstens $\sqrt[p]{\frac{n_1}{n_1 - p} \cdot \frac{n_2}{n_2 - p} \cdots \frac{n_k}{n_k - p} \left| \frac{a_0}{a_p} \right|}$ ist. — Dieser Satz ist aber eine direkte Folgerung des Beweises eines bekannten Satzes von L. Fejér (Math. Ann. **65**, 418 bis 419). Die Bemerkung des Verf., daß man die Gleichung $g(x) = 0$ durch eine Substitution $x = Az$ in eine Gleichung $g(Az) = h(z) = 0$ überführen kann, wo die Faktoren von $a_0, a_1 z, \ldots, a_p z^p$ eine zunehmende positive Folge bilden, ist nicht wesentlich. *Sz. Nagy* (Szeged).

Bloch, A., und G. Pólya: Abschätzung des Betrages einer Determinante. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **78**, 27—33 (1933).

Beweis der folgenden interessanten Ungleichung: Bezeichnet D die n-zeilige Determinante mit den reellen Elementen a_{ik}, so ist

$$|D| \leqq \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} \left(|a_{i1}| + |a_{i1} - a_{i2}| + |a_{i2} - a_{i3}| + \cdots + |a_{i,n-1} - a_{in}| + |a_{in}| \right) .$$

Die Bedeutung dieser Ungleichung wird durch einige Anwendungen beleuchtet. *Otto Szász* (Frankfurt a. M.).

Amante, S.: Sulla riduzione a forma canonica di una classe speciale di matrici. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 31—36 (1933).

The matrices considered are of order n and type $A = (a_{rs})$ where $a_{rs} = 0$ if $r > s$ and $a_{rs} = a_{s-r+1}$ if $r \leqq s$. It is shown that the number of blocks in the Jordan normal form of A is i, where the i-th number in the sequence $a_2, a_3, \ldots, a_n$, 1 is the first which does not vanish. If the k-th block has q_k 1's above the main diagonal (is of order

$q_k + 1)$, and if $q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_i$, it is shown that $q_1 i < n \leqq (q_1 + 1) i$, and that

$$q_k = \left[\frac{n - (q_1 + 1) - \cdots - (q_{k-1} + 1)}{i - k + 1}\right] - \varrho\left(\frac{n - (q_1 + 1) - \cdots - (q_{k-1} + 1)}{i - k + 1}\right),$$

$k = 2, 3, \ldots, i$, where $[x]$ is the integral part of x and $\varrho(x)$ is 1 or 0 according as x is or is not an integer. *MacDuffee* (Columbus).

Amante, S.: Sulla riduzione a forma canonica di una classe speciale di matrici. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 431—436 (1933).

The notation is the same as in Note I under the same title (see above). It is shown further that a necessary and sufficient condition that a matrix A_1 in Jordan normal form be the normal form of a matrix A of the type considered is that each element of the principal diagonal of A_1 be equal to a_1, and that the difference of any two of the q's be 0 or 1. If q is the quotient and r the remainder in the division of n by i, then A_1 consists of r blocks of order $q + 1$ and $i - r$ blocks of order q. *MacDuffee.*

Young, Alfred: Some generating functions. Proc. London Math. Soc., II. s. **35**, 425—444 (1933).

Die Anzahl der linear-unabhängigen Seminvarianten (oder Kovarianten) vom Grade δ und Gewichten α, β, γ einer ternären Form a_x^n ist gleich dem Koeffizienten von $y^\beta z^\gamma$ in der erzeugenden Funktion

$$(1 - y)(1 - z)\left(1 - \frac{z}{y}\right)\sum_{r+s=0}^{n} y^{r\delta} z^{s\delta} \prod_{\varrho+\sigma=0}^{n}{}' (1 - y^{\varrho - r} z^{\sigma - s})^{-1}.$$

In derselben Weise werden erzeugende Funktionen für Kovarianten und Kombinanten eines Systems von binären Formen gleichen Grades angegeben. Schließlich wird das für ternäre Formen gefundene Ergebnis auf Formen in mehr als 3 Veränderlichen ausgedehnt. Die Methode der ganzen Untersuchung wird durch die „quantitative Substitutionsanalyse“ des Autors geliefert. *van der Waerden* (Leipzig).

Schur, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **18/20**, 598—623 (1933).

Es wird bewiesen, daß eine Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ vom n-ten Grade, die einen Zyklus der Ordnung n enthält und nicht zweifach transitiv ist, imprimitiv ist, sofern n keine Primzahl ist, und für jedes n eine invariante Untergruppe besitzt, die eine von E verschiedene Potenz des Zyklus enthält. (Für Primzahlpotenzwerte von n sind diese Sätze von Burnside bewiesen.) Der Beweis benutzt keine Gruppencharaktere; gebraucht wird erstens, daß der Ring derjenigen Matrizen n-ten Grades, die mit allen zu den Permutationen von $\mathfrak{G}$ gehörigen Matrizen vertauschbar sind, dann und nur dann genau zwei linear unabhängige Elemente besitzt, wenn $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist, und es werden zweitens die Elemente einer n. V. in $\mathfrak{G}$ enthaltenen transitiven (zunächst noch nicht notwendig zyklischen) Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung n als Vertauschungssymbole für die Permutationen von $\mathfrak{G}$ benutzt, und gewisse sich dabei ergebende Komplexe aus den Elementen von $\mathfrak{H}$ untersucht. — Es wird ein Beispiel dafür angegeben, daß $\mathfrak{G}$ im Falle einer nichtzyklischen abelschen Untergruppe $\mathfrak{H}$ primitiv und nur einfach transitiv sein kann. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Specht, Wilhelm: Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen. Math. Z. **37**, 321—341 (1933).

In Fortführung seiner Arbeit in „Schriften d. math. Sem. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin“ 1, H. 1 (1932) (dies. Zbl. 4, 338) behandelt Verf. die Gruppen $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, die aus einer beliebigen Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ vom n-ten Grade entstehen, indem man für die Einsen in den Permutationsmatrizen beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$ einsetzt, wobei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe sein soll, deren sämtliche Darstellungen vollständig reduzibel sind. Aus den irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ und denen gewisser Untergruppen von $\mathfrak{P}_n$ lassen sich dann, u. a. mit Hilfe der Kronecker-Hurwitzschen Matrizenkomposition alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ konstruieren, und es

wird auch ein Kriterium dafür angegeben, wann zwei nach dem angegebenen Verfahren konstruierte irreduzible Darstellungen ähnlich sind. Die erhaltenen Resultate werden für mehrere spezielle Gruppen $\mathfrak{G}$ ausgewertet; insbesondere ergeben sich Sätze über die Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, wenn $\mathfrak{G}$ eine der Gruppen aller Matrizen eines bestimmten Grades mit reellen resp. beliebigen komplexen Koeffizienten und mit einer Determinante $\neq 0$ resp. $= \pm 1$ ist. Übrigens gelten alle Sätze schon dann, wenn man unter „Gruppe" ein System von Elementen mit assoziativer Komposition und Einheitselement (aber evtl. ohne inverse Elemente) versteht. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Tschunichin, Sergei: Über spezielle Gruppen. II. Rec. math. Moscou **40**, Nr 1, 39—41 u. dtsch. Zusammenfassung 41 (1933) [Russisch].

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt speziell, wenn sie direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist. In Fortführung seiner Arbeit in Rec. math. Moscou **36** (1929) gibt Verf. verschiedene hinreichende Bedingungen an, damit $\mathfrak{G}$ speziell sei; dies ist u. a. der Fall, wenn alle Untergruppen, deren Ordnungen nur durch zwei Primzahlen teilbar sind, speziell sind, oder wenn die Ordnung der Gruppe zu irgendeiner der Zahlen $\prod_{i=1}^{\nu}(p_i^{\alpha_i} - 1)(p_i^{\alpha_i - 1} - 1)\ldots(p_i - 1)$ teilerfremd ist, wobei die p_i sämtliche in der Ordnung der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ aufgehenden Primzahlen durchlaufen, und die α_i die höchsten Potenzen der p_i sind, die in einer der Zahlen der zu einer beliebigen Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ gehörigen Indexreihe aufgehen. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Miller, G. A.: Number of operators of prime power orders contained in a group. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.A. **19**, 780—783 (1933).

Motzok, D. K.: The complete groups of the regular polytopes. Rec. math. Moscou **40**, Nr 1, 86—114 (1933).

Verf. untersucht die durch Drehungen von regulären Polytopen in mehrdimensionalen Räumen erzeugten endlichen Gruppen. Dabei setzt er voraus, daß alle Typen der Gruppen der Polytope erschöpft sind durch 1. n-dimensionale Tetraedergruppen, d. h. symmetrische Gruppe von den Graden $n + 1$, 2. n-dimensionale Oktaedergruppen, d. h. symmetrische Permutationsgruppen mit Vorzeichenwechsel (monomiale Gruppen mit $\varepsilon = \pm 1$) von den Graden n und von den Ordnungen $2^n \cdot n!$, nur die Fälle $n = 3$, $n = 4$ ausgenommen. Das trifft nicht zu. — Verf. untersucht die geometrische Natur der Operationen dieser Gruppen, indem er sie als „Dirotation", „Rotoreflexion" usw. bezeichnet. Dann führt er die vollständigen Tabellen der in diesen Gruppen enthaltenen Operationen an und gibt eine Formel für die Anzahl der konjugierten Operationen dieser Gruppen. Endlich spricht er über die Möglichkeit, auf geometrischem Wege den Raum niedrigster Dimension zu bestimmen, in welchem eine gegebene endliche Gruppe als Teiler einer der Gruppen der regulären Polytope darstellbar ist.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Môri, Yasuo: Zum Fundamentalsatze der Idealtheorie. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **15**, 225—226 (1933).

Mittels des Minkowskischen Satzes über lineare Formen wird direkt bewiesen, daß in einem endlichen Zahlkörper von der Grundzahl d jedes Ideal $\mathfrak{j} \neq (0)$ einem solchen äquivalent ist, das die Zahl $\left[\sqrt{|d|}\right]!$ enthält, ja sogar, wie der Beweis zeigt, einem solchen, das eine natürliche Zahl $\leqq \sqrt{|d|}$ enthält. Hurwitz hatte zum Beweise der ersteren (in dieser Schärfe von ihm für den Beweis des Hauptsatzes nicht benötigten) Tatsache noch einen weiteren Hilfssatz verwandt. Der Schlußbemerkung jedoch, aus dem Beweisverfahren $\left(\text{Benutzung einer Zahl } \alpha \text{ in } \mathfrak{j} \text{ mit } 0 < |N\alpha|/N(\mathfrak{j}) \leqq \sqrt{|d|}\right)$ folge ohne weitere Hilfsmittel der bekannte Satz, daß in jeder Idealklasse ein Ideal mit Norm $\leqq \sqrt{|d|}$ liegt, muß anscheinend widersprochen werden; die Methode liefert wohl nur die Schranke $\left(\sqrt{|d|}\right)^{n-1}$, wo n der Körpergrad ist. *W. Weber* (Göttingen).

Ore, Oystein: Theory of non-commutative polynomials. Ann. of Math., II. s. **34**, 480—508 (1933).

Verf. betrachtet Polynome einer Unbestimmten über einem — mit der Unbestimmten im allgemeinen nicht vertauschbaren — kommutativen oder nichtkommutativen Körper; die Multiplikation der Polynome wird der Einschränkung unterworfen, daß der Grad des Produktes gleich der Summe der Grade der Faktoren wird, daß also ein Ring ohne Nullteiler entsteht. Die Zerlegungssätze solcher Polynome folgen — wie in der Einleitung bemerkt — einfach aus der Theorie der verallgemeinerten abelschen Gruppen; denn die Restklassen nach dem Polynom bilden eine solche Gruppe. Kompositionsreihenbildung bzw. direkte Summenzerlegung der Gruppe entspricht dabei Produktzerlegung bzw. kl. gem. Vielf. der Polynome; Isomorphie der Gruppenbestandteile bedeutet Ähnlichkeit der Polynome; für Gruppen sind die Zerlegungssätze bekannt. — Verf. gibt eine von der Gruppentheorie unabhängige, direkte Begründung, mit denselben Methoden, mit denen er J. f. Math. **167** [dies. Zbl. **3**, 201 (1932)] die Theorie der Differentialpolynome direkt begründet hat; hier wie dort steht der Begriff der Transformation im Mittelpunkt. Bemerkt sei, daß wegen der Gültigkeit des euklidischen Algorithmus auch hier die Existenz des Quotientenkörpers des Polynomrings folgt. *E. Noether* (Göttingen).

Ore, Oystein: On a special class of polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 559—584 (1933).

Die betrachteten Polynome — vom Verf. p-Polynome genannt — sind von der Form: $F(x) = a_0 x^{p^m} + a_1 x^{p^{m-1}} + \cdots + a_m x$, wo die Koeffizienten einem Körper der Charakteristik p angehören. Als Multiplikation wird definiert: $F \times G = F(G(x))$; damit bilden die p-Polynome einen nichtkommutativen Ring, der sich als Spezialfall dem in der vorangehenden Besprechung betrachteten unterordnet. Es gelten also die dort erwähnten formalen Zerlegungssätze. — Unabhängig davon entwickelt Verf. die Nullstellentheorie der p-Polynome, besonders für den Fall, daß der Koeffizientenkörper ein Galoisfeld. Das ergibt sehr einfache Beweise bekannter Sätze von Moore und Dickson, insbesondere über Invarianten gegenüber der vollen linearen Gruppe modulo p. — Die multiplikative Verknüpfung der p-Polynome entspricht derjenigen der (linearen) Differentialausdrücke; auch sonst bestehen Analogien. Die Nullstellen bilden einen Modul, der bei Galoisfeld als Koeffizienten von endlichem Rang wird; dadurch sind die p-Polynome umgekehrt charakterisiert. Dieser Modul wird Darstellungsmodul für die galoissche Gruppe; das ist das Analogon zur Darstellung der Rationalitätsgruppe in der Picard-Vessiotschen Theorie. Je nachdem, ob das p-Polynom im obigen Sinne reduzibel bzw. in teilerfremde zerfallend ist, gilt dasselbe für die Darstellung, auch hier in Analogie zum Verhalten der Rationalitätsgruppe.

E. Noether (Göttingen).

Raudenbush jr., H. W.: Differential fields and ideals of differential forms. Ann. of Math., II. s. **34**, 509—517 (1933).

Verf. betrachtet Differentialkörper bzw. Ringe; d. h. solche den Rechengesetzen genügende Bereiche, wo neben Addition und Multiplikation auch noch die Differentiation als formale Verknüpfungsregel gegeben ist. Polynome über solchen Bereichen entsprechen den algebraischen, nicht notwendig linearen Differentialausdrücken, wie sie vor allem von Ritt in formaler Hinsicht betrachtet worden sind; sie entstehen durch Adjunktion von Unbestimmten und Anwendung der drei Verknüpfungen. Ebenso beziehen sich alle Begriffe wie Erweiterung, Unterkörper, Ideal . . . nur auf Bereiche, die gegenüber den drei Verknüpfungen abgeschlossen sind. Bei diesen Begriffsbildungen bleibt, wie Verf. zeigt, ein großer Teil der algebraischen Theorie erhalten, mit nur kleinen Abänderungen in den Beweisen. Es gilt das transitive Gesetz der algebraischen Abhängigkeit (nur an dieser Stelle kompliziert sich der Beweis), und daraus folgt, wie im Algebraischen, die Zerlegung jeder Körpererweiterung in eine rein transzendente und nachfolgende algebraische. Es läßt sich weiter jede durch Adjunktion

endlich vieler Elemente erzeugte Körpererweiterung auffassen als Nullstellenkörper eines Polynom-Primideals, und es gelten hier die üblichen Dimensionssätze. *E. Noether.*

Mordell, L. J.: Minkowski's theorem on homogeneous linear forms. J. London Math. Soc. 8, 179—182 (1933).

Es seien $L_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ $(i = 1, \ldots, n)$ reelle Linearformen, deren Determinante den Betrag $D > 0$ hat. Dann gibt es nach Minkowski zu n Zahlen $\lambda_i > 0$ mit $\lambda_1 \ldots \lambda_n \geqq D$ wenigstens ein System nicht sämtlich verschwindender ganzer x_i, für die $|L_i| \leqq \lambda_i$ $(i = 1, \ldots n)$ ist. Hierfür wird ein elementarer arithmetischer Beweis angegeben. Für ganzzahlige, und damit auch für rationale a_{ik} und λ_i ergibt sich der Satz sehr einfach aus dem folgenden in der Note bewiesenen Hilfssatz: Sind die a_{ik} ganz, so ergeben die L_i für alle ganzen x_i genau D^{n-1} verschiedene Systeme von Resten mod D. Der allgemeine Satz folgt durch Grenzübergang. *W. Fenchel* (Göttingen).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles. Fundam. Math. 20, 214—220 (1933).

S. Ulam proved (Fundam. Math. 16, 145): If the set of subsets of a set Z of cardinal $\aleph_1$ is divided into two classes M and N in such a way that every set of non-overlapping elements of M is at most denumerable, then there exists an infinite sequence $\{Z_n\}$ of elements of N such that $Z - \sum_{n=1}^{\infty} L_n$ is at most denumerable. In the present article, extension is made to arbitrary sets of cardinal $m \geqq \aleph_0$, provided there is no inaccessible aleph $\leqq m$. (By an inaccessible aleph $\aleph_\alpha$, we understand here one which is not the sum of less than $\aleph_\alpha$ cardinals each less than $\aleph_\alpha$, and such that α is an ordinal of the second species.) *Blumberg* (Columbus).

Ulam, Stanisław: Über gewisse Zerlegungen von Mengen. Fundam. Math. 20, 221—223 (1933).

Aus einem durch Sierpiński verschärften Satze des Verf. (vgl. vorst. Ref.) folgt für Mengen, deren Mächtigkeit kleiner ist als die erste unerreichbare Kardinalzahl: Jede Menge der zweiten Baireschen Kategorie (in einem beliebigen perfekten Raume) enthält überabzählbar viele elementfremde Teilmengen, die ebenfalls von der zweiten Kategorie sind. Ebenso: Jede Menge mit positivem äußeren Maß enthält überabzählbar viele elementfremde Teilmengen mit positivem äußeren Maß.

Willy Feller (Kiel).

Kantorovitch, L., et E. Livenson: Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés. C. R. Soc. Sci. Varsovie 25, 16—22 (1933).

A class of operations on closed plane sets of points defined by Sierpiński (C. R. Soc. Sci. Varsovie 24, 57; this Zbl. 3, 154) is shown to be equivalent to a class of analytic operations defined by the authors (C. R. Acad. Sci., Paris 191, 352). *Chittenden.*

Koźniewski, Andrzej: Quelques remarques sur les anneaux d'ensembles. C. R. Soc. Sci. Varsovie 25, 34—42 (1933).

A set R of sets is said to be a "ring", if the sum and product of every pair of elements of R belongs to R. If I is any set of sets, $I_{\bar{\lambda}}$ denotes the set of all superior limits (Hausdorff) — some as complete limits (Borel) — of denumerable sequences of elements of I; $I_{\underline{\lambda}}$ has a similar meaning for the inferior limits. It is shown by means of an example that if R is a ring, $R_{\bar{\lambda}}$ and $R_{\underline{\lambda}}$ need not be rings. *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, W.: Sur un ensemble linéaire non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait. C. R. Soc. Sci. Varsovie 25, 102—105 (1933).

In presenting a sixth demonstration of the existence of a set of the kind described in the title the author states that it is the most elementary of those which do not utilize the hypothesis of the continuum. *Chittenden* (Iowa).

Sierpiński, W.: Sur la superposition des fonctions de Baire. Fundam. Math. **20,** 173—176 (1933).

There exists a linear set E and a function $\Phi(x)$ defined on E and of class 1 in E, such that, for every function $f(x)$ of class 3, there exists a function $\theta(x)$ of class 1 whose values, as well as those of $\Phi(\theta\ (x))$ belong to E, and such that, for every x, $f(x)=\Phi(\Phi(\theta(x)))$. *Blumberg* (Columbus).

Eilenberg, Samuel: Remarques sur les ensembles et les fonctions relativement mesurables. C. R. Soc. Sci. Varsovie **25,** 93—98 (1933).

Ruziewicz has shown the existence of a real function $\psi(x)$ such that every real function is a measurable function of $\psi(x)$. The present article gives necessary and sufficient conditions for such a function and states special implications under the hypothesis of the continuum as well as several weaker hypotheses. *Blumberg.*

Hanson, E. H.: A note on compactness. Bull. Amer. Math. Soc. **39,** 397—400 (1933).

Proof of Fréchet's theorem, that a necessory and sufficient condition for the compactness of a set of measurable functions is that they be "almost equi-bounded" and "almost equi-continuous", in a direct and brief manner by the use of the general criterion for compactness in a complete metric space. *Blumberg* (Columbus).

Malchair, Henri: Sur les anneaux de fonctions. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **2,** 122 bis 124 (1933).

A ring Φ of (real) functions is a set of functions such that with every pair $u(x)$, $v(x)$ of elements of Φ, $\max[u(x), v(x)]$ and $\min[u(x), v(x)]$ also belong to Φ. Two properties relating to rings are given. (1) The set of functions of class $\leqq \alpha$ ($< \alpha$) is a ring. (2) The function equal to max (min) of a sequence of elements of a ring Φ belong to $\Phi_g (\Phi_h)$, these symbols meaning respectively the set of functions which are limits of non-decreasing (increasing) sequences of functions of Φ — and direct implications are stated for functions of class α. *Blumberg* (Columbus).

Malchair, Henri: Sur les fonctions ne prenant qu'un nombre limité de valeurs différentes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **2,** 124—125 (1933).

If $f(x)$, defined in an interval and of class $\alpha > 0$, takes on only a finite number of different values, there exists a sequence $\{f_n(x)\}$ of functions of class $\leqq \alpha$ having $f(x)$ as limit such that $f_n(x)$ is (a) the difference of 2 functions one an F^α and the other an F^α or of class $< \alpha$, and b) discontinuous at every point of discontinuity of f; by an F^α we understand here a function of class α which is the limit of a non-increasing sequence of functions of class $< \alpha$. *Blumberg* (Columbus).

Singh, Avadhesh Narayan: On the method of construction and some properties of a class of non-differentiable functions. Proc. Benares Math. Soc. **13,** 1—17 (1931).

The author presents an analytic proof of the non-differentiability of a class of functions generalizing a class studied by E. H. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. **1,** 72—90 (1900), and determines the points at which the functions possess progressive and regressive derivatives. These functions possess a cusp at no point, and every value is attained on a perfect set (presumably nowhere dense). *Chittenden* (Iowa).

Saks, S., and J. D. Tamarkin: On a theorem of Hahn-Steinhaus. Ann. of Math., II. s. **34,** 595—601 (1933).

Von einer Funktion $H(x, t)$ werde gesagt: sie genügt der Bedingung (A), wenn 1. $H(x, t)$ für alle x des Intervalles $a \leqq x \leqq b$, abgesehen von einer Nullmenge E, von endlicher Variation in $\alpha \leqq t \leqq \beta$ ist, und 2. für jedes nicht zu E gehörige x und jedes t aus $\alpha < t < \beta$ gilt: $H(x, t) = \frac{1}{2}[H(x, t+0) + H(x, t-0)]$; die Variation $\int_\alpha^\beta |d_t H(x, t)|$ werde mit $V(x, H)$ bezeichnet. In Verallgemeinerung von Sätzen von Hahn und Steinhaus wird bewiesen: Genügt $H_n(x, t)$ der Bedingung (A), und ist für jedes stetige $g(t)$ die Funktionenfolge $\int_\alpha^\beta g(t)\, d_t H_n(x, t)$ beschränkt in $a \leqq x \leqq b$,

abgesehen von einer Nullmenge, so ist auch die Funktionenfolge $V(x, H_n)$ beschränkt in $a \leqq x \leqq b$, abgesehen von einer Nullmenge. Der Beweis stützt sich auf die beiden Hilfssätze (in denen $H(x, t)$ eine der Bedingung (A) genügende Funktion bedeutet): 1. Stellt für jedes stetige $g(t)$ der Ausdruck $U(x, g) = \int_\alpha^\beta g(t)\, d_t H(x, t)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ abgesehen von einer Nullmenge beschränkte Funktion dar, so ist — bei Zugrundelegung der üblichen Metrik im Raume der stetigen und im Raume der abgesehen von einer Nullmenge beschränkten Funktionen — die Operation $U(x, g)$ linear. (Vgl. hierzu St. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, S. 87, Théorème 9.) 2. Damit $U(x, g)$ eine lineare Operation sei, ist notwendig und hinreichend, daß $V(x, H)$ beschränkt sei in $a \leqq x \leqq b$, abgesehen von einer Nullmenge. — Gestützt auf Resultate von S. Saks über die Metrisierung des Raumes der meßbaren Punktmengen eines Intervalles wird ferner gezeigt: Sei $K_n(x, t)$ für fast alle x aus $0 \leqq x \leqq 1$ integrierbar nach t in $0 \leqq t \leqq 1$; ist für jede meßbare Menge E des Intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ die Funktionenfolge $\int_E K_n(x, t)\, dt$ beschränkt in $0 \leqq x \leqq 1$, abgesehen von einer Nullmenge, so ist auch die Funktionenfolge $\int_0^1 |K_n(x, t)|\, dt$ beschränkt in $0 \leqq x \leqq 1$, abgesehen von einer Nullmenge. *H. Hahn* (Wien).

Szpilrajn, Edward: Remarques sur les fonctions sousharmoniques. Ann. of Math., II. s. **34**, 588—594 (1933).

A function $u(x, y)$ is said to be almost subharmonic in an open region D if it is summable and for almost every point (a, b) satisfies the inequality $u(a, b) \leqq \frac{1}{\pi r^2} \iint_K u(x, y)\, dx\, dy$ on any circle $K = K(a, b; r)$ contained in D. There are established the following theorems: (I) In order that a function should be almost subharmonic in an open region D it is necessary and sufficient that it should coincide almost everywhere in D with a subharmonic function (in the sense of Riesz). (II) If a sequence $\{u_n(x, y)\}$ of almost subharmonic functions converges in mean to a function $u(x, y)$ (i. e. if $\lim_n \iint_F |u_n - u|\, dx dy = 0$ on any bounded measurable set F) then $u(x, y)$ is again an almost subharmonic function. *Saks* (Warszawa).

Hedrick, E. R., and W. M. Whyburn: An application of the Dedekind cut notion to integration. Amer. J. Math. 55, 390—398 (1933).

Ziel der Arbeit: Definition des Lebesgueschen Integrals mit Hilfe Dedekindscher Schnitte ohne Benutzung der Maßtheorie. (Benutzt wird nur der Begriff der Nullmenge). Die Maßtheorie ergibt sich natürlich als Spezialfall der so entwickelten Integrationstheorie. — Eine Funktion heißt im Intervall X $(a \leqq x \leqq b)$ einfach, wenn X in endlich viele halboffene Teilintervalle zerfällt, in denen sie konstant ist. Es sei M eine Teilmenge von X, G eine solche abzählbare Menge von einfachen Funktionen, daß die Gesamtheit ihrer Werte für fast alle x aus M auf der reellen Achse dicht ist. Jede Einteilung von G in zwei Klassen derart, daß die Funktionen der ersten Klasse fast überall in M nicht größer sind als die der zweiten Klasse, heißt ein Schnitt in G über M und definiert eine neue Funktion: die so entstehende Gesamtheit von Funktionen heißt die Klasse $C(M)$. Es ist leicht zu zeigen, daß diese Klasse durch Schnitte nicht erweiterbar ist, daß sie Teilmenge der Klasse $C(M')$ ist, wenn M' eine Teilmenge von M ist, und daß sie genau diejenigen Funktionen enthält, die fast überall auf M stetig sind. Definiert man nun das Integral über die einfachen Funktionen in x in der natürlichen Art, so zeigt sich, daß für alle Funktionen der Klasse $C(X)$ das Integral durch den entsprechenden Schnitt in den Integralwerten der einfachen Funktionen in eindeutiger Weise bestimmt ist. Die Klasse $C(X)$ enthält alle beschränkten Riemann-integrierbaren Funktionen als echte Teilmenge und ist selbst echte Teilmenge der beschränkten meßbaren Funktionen. — Die Klasse $C(M)$ wird nun zur Klasse $D(M)$ erweitert:

eine Funktion $f(x)$ gehört zu dieser, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $M_{(\varepsilon)}$ von M gibt, die durch abzählbar viele Intervalle mit der Gesamtlänge kleiner als ε überdeckbar ist, derart, daß die Funktion $f_{(\varepsilon)}(x)$, die auf $M - M_{(\varepsilon)}$ gleich $f(x)$ und auf $M_{(\varepsilon)}$ gleich Null ist, zur Klasse $C(M)$ gehört. Für die Funktionen dieser Klasse ist das Integral unmittelbar durch Grenzübergang aus den Integralen über $f_{(\varepsilon)}(x)$ zu definieren: die Klasse $D(M)$ ist, wenn M meßbar ist, mit den beschränkten L-meßbaren Funktionen identisch. Das so definierte Integral stimmt natürlich mit dem Lebesgueschen überein. *Willy Feller* (Kiel).

Frink jr., Orrin: Jordan measure and Riemann integration. Ann. of Math., II. s. **34**, 518—526 (1933).

Es wird bewiesen: „Damit eine in einem abgeschlossenen Intervall beschränkte Funktion $f(x)$ nach Riemann integrierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß für alle reellen y-Werte, mit Ausnahme abzählbar vieler, die Teilmengen $E[f(x) \leqq y]$ und $E'[f(x) \leqq y]$ des Intervalls meßbar nach Jordan seien." Dieser Satz ist jedoch nicht neu; es läßt sich sogar zeigen, daß für die R-Integrierbarkeit schon entweder die J-Meßbarkeit der erstgenannten Gruppe von Teilmengen, abzählbar viele ausgenommen, oder die J-Meßbarkeit der zweiten Gruppe von Teilmengen, abzählbar viele ausgenommen, hinreichende (und notwendige) Bedingung ist. [Man siehe, auch für die weitere Anwendung, die Arbeiten des Ref.: Nieuw Arch. Wiskde (2) **15**, 321—329 (1928) und **16**, 12—16 (1929), C. R. Soc. Sci. Varsovie **22**, 118—142 (1929); auch Christ. Huygens **4**, 346—350 (1926) mit Korrektion in Christ. Huygens **5**, 205 (1927). Frink kennt nur die letztgenannte Arbeit, jedoch ohne die Korrektion!] Die notwendige und hinreichende Bedingung wird in zehn weitere Formen gleicher Art gebracht; z. B.: $f(x)$ soll Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Reihe von Funktionen sein, deren jede nur endlich viele Werte annimmt auf J-meßbaren Mengen. Die Behandlung wendet hier und da Ergebnisse aus der Lebesgueschen Integrationstheorie an; im Gegensatz dazu zeigt die Behandlung in den Arbeiten des Ref., daß die Kenntnis der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie entbehrt werden kann.

J. Ridder (Groningen).

Cinquini, Silvio: Sulla quadratura delle superfici. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 315—325 (1933).

Tonelli bewies folgende Sätze [Atti Accad. naz. Lincei, Mem. **3** (1926)]: Die Fläche F sei in einem Quadrate der x, y-Ebene durch die stetige Funktion $z = f(x, y)$ definiert. Damit F einen endlichen Flächeninhalt im Sinne von Lebesgue habe, ist notwendig und hinreichend, daß f von beschränkter Schwankung sei. Der Flächeninhalt wird dann und nur dann durch das bekannte Doppelintegral dargestellt, wenn f vollstetig ist. — Diese Resultate werden auf den Fall ausgedehnt, daß der Definitionsbereich von $f(x, y)$ eine beliebige beschränkte offene Menge der x, y-Ebene ist.

Willy Feller (Kiel).

Analysis.

Košliakov, N.: Sur le calcul des intégrales définies aux limites infinies au moyen des formules de quadratures mécaniques. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **6**, 801 bis 808 (1933) [Russisch].

Watson, G. N.: Du Bois Reymond's constants. Quart. J. Math., Oxford Ser. **4**, 140—146 (1933).

Let $c_m = \int\limits_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^m \right| dt$. It is found that c_{2m} is expressible as a polynomial of degree m in e^2 with rational coefficients which are such that the corresponding coefficients in $2^{2m-1}(m-1)!\, c_{2m}$ are integers. In particular, $2c_2 = e^2 - 7$, $8c_4 = e^4 - 4e^2 - 25$, $32c_6 = e^6 - 6e^4 + 3e^2 - 98$. The method consists in discussing the contour integral

of $\frac{z \sin z}{\sin z - z \cos z}(1+z^2)^{-m}$. This method is much more difficult to apply to the evaluation of c_{2m-1}. The author computes only $c_3 = 0{,}02825\,17642$. *J. D. Tamarkin.*

Kneser, Hellmuth: Einfacher Beweis eines Satzes über rationale Funktionen zweier Veränderlichen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **9**, 195—196 (1933).

Der Satz lautet: Die Funktion $f(x, y)$ sei definiert für alle Wertpaare (x, y), bei denen x einem unendlichen Wertvorrat A und y einem nicht abzählbaren Wertvorrat B angehört. Für jeden festen Wert x aus A (bzw. y aus B) stimme f überein mit einer rationalen Funktion von y (bzw. x). Dann stimmt die Funktion f in ihrem Definitionsbereich überein mit einer rationalen Funktion von x und y. *van Kampen.*

Babini, José: Über die Nullstellen der zyklischen Funktionen. Publ. Fac. Ci. exact., Fis. y Nat., Univ. Buenos Aires B Nr **12**, 27—35 (1932) [Spanisch].

Ausgehend von einer Untersuchung von J. Rey Pastor (obige Z. Nr **4**), in der gezeigt worden war, daß die Nullstellen der zyklischen Funktionen n-ter Ordnung

$$\omega_r = \pm \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_p^r \exp(z\varepsilon_p), \quad \varepsilon_p^n = \pm 1$$

(oberes Vorzeichen bezieht sich auf die hyperbolischen, unteres Vorzeichen auf die zirkulären zyklischen Funktionen) sich kongruent auf den Halbstrahlen durch $\varepsilon_p^n = \mp 1$ verteilen, während der Ursprung eine $n-r$-fache Wurzel trägt, findet man für den Betrag x_k der Wurzeln

$$x_k = \frac{(2k+1)n - 2r}{2n \sin\frac{\pi}{n}}\pi + \alpha_k, \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0.$$

Von der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k)^{-2}$ wird man zur Weierstrassschen Produktdarstellung geführt, als deren endgültige Form $\omega_r = \frac{z^{n-r}}{(n-r)!}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{z^n}{x_k^n}\right)$ ermittelt wird. Durch Vergleichen der direkt zu findenden Potenzreihe für die zyklischen Funktionen mit der aus der Produktdarstellung folgenden lassen sich eine Anzahl von Relationen für die Wurzeln der zyklischen Funktionen angeben. *F. Knoll* (Wien).

Coble, Arthur B.: Hyperelliptic functions and irrational binary invariants. III. Amer. J. Math. **55**, 349—375 (1933).

Weiterführung und Ergänzung der Untersuchungen des ersten Teiles (vgl. dies. Zbl. **4**, 390 und **6**, 120) im Falle $p = 3$. *Myrberg* (Helsinki).

Jessen, Börge: Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Funktion. Eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel. Math. Ann. **108**, 485—516 (1933).

Der Verf. beweist ein Analogon zur Jensenschen Formel über die Anzahl der Nullstellen für analytische fastperiodische Funktionen. Präziser gefaßt werden die folgenden Resultate erhalten: A) Es sei $f(\sigma + it)$ eine in $[\alpha, \beta]$ reguläre anal. fstper. Fkt. Für $(\delta - \gamma) \to \infty$, existiert

$$\varphi_f(\sigma) = \lim \frac{1}{\delta - \gamma}\int_\gamma^\delta \log|f(\sigma + it)|\,dt$$

(auch falls Nullstellen vorhanden sind) gleichmäßig in jedem Teilintervall von (α, β). Die Fkt. $\varphi_f(\sigma)$ ist konvex. Ist sie differenzierbar in den Punkten $\alpha_1, \beta_1, (\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$, so existiert auch die Häufigkeit

$$H(\alpha_1, \beta_1) = \lim_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{1}{\delta - \gamma} N(\alpha_1, \beta_1; \gamma, \delta)$$

der Nullstellen, wo $N(\alpha_1, \beta_1; \gamma, \delta)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(s)$ bezeichnet, die im Rechteck $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$; $\gamma < t < \delta$ liegen. Es gilt die Jensensche Formel

$$2\pi H(\alpha_1, \beta_1) = \varphi'(\beta_1) - \varphi'(\alpha_1).$$

B) Ist die Funktion $\varphi_f(\sigma)$ linear, $= \varkappa + \lambda\sigma$, in einem gewissen Intervall (α_2, β_2), dann ist $f(s) \neq 0$ im Streifen $\alpha_2 < \sigma < \beta_2$, und es gilt die eindeutig bestimmte Darstellung

$$f(s) = \varepsilon \cdot e^{\varkappa + \lambda\sigma + g(s)},$$

wo $|\varepsilon| = 1$ und $g(s)$ eine in $[\alpha_2, \beta_2]$ fastper. Fkt. ohne konstantes Glied in ihrer Dirichletentwicklung ist. Der Modul der Exponenten der Fkt. $f(s)$ enthält sowohl den Modul der Exponenten von $g(s)$ wie auch die Konstante λ. C) Es wird erwähnt, daß zu jeder konvexen Fkt. $\varphi(\sigma)$, die in keinem Teilintervall linear ist, es stets eine fastper. Fkt. ist, deren $\varphi_f(\sigma) = \varphi(\sigma)$ ist. Ob dieser Satz ohne die einschränkende Bedingung über die Linearität gilt, bleibt eine offene Frage. — Zum Schluß werden zwei interessante Beispiele diskutiert, welche die Unregelmäßigkeiten die bei fastper. Fkt. im Gegensatz zu den per. in der Verteilung der Nullstellen auftreten können, illustrieren.

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

Wintner, Aurel: Upon a statistical method in the theory of diophantine approximations. Amer. J. Math. **55**, 309—331 (1933).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Werteverteilung von fastperiodischen Funktionen der Form $z(t) = x(t) + iy(t) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j \exp i\lambda_j(t - t_j)$ $(r_j > 0)$, wo die Frequenzen λ_j linear unabhängig sind, in welchem Falle bekanntlich $R = \sum_{j=1}^{\infty} r_j < +\infty$. Die Verteilungsfunktion $\varrho(\xi) = \lim_{l=+\infty} \operatorname{mes}[x < \xi]_l / 2l$ der reellen Komponente $x(t)$ einer solchen Funktion wurde schon in einer früheren Arbeit studiert [Math. Z. **36**, 618—629 (1933); dies. Zbl. **6**, 162]; in Fortsetzung dieser Arbeit erhält man nun $\varrho(\xi) - \varrho(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{[\sin(\xi\eta)/\eta]\prod_{j=1}^{\infty} J_0(r_j\eta)\right\}d\eta$, woraus wegen $|J_0(\eta)| < C/\eta^{\frac{1}{2}}$ die unbeschränkte Differentiierbarkeit von $\varrho(\xi)$ folgt. Die Verteilungsfunktion einer komplexwertigen fastperiodischen Funktion $z(t)$ existiert nach Haviland [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 549—555 (1933); vgl. dies. Zbl. **7**, 20] stets als Mengenfunktion $\varphi(E)$. In dem vorliegenden Fall war noch die stetige Differentiierbarkeit von $\varphi(E)$ bekannt. Verf. erhält einen neuen Beweis dieses Satzes und findet für die Ableitung $\varphi'(E) = \delta(z)$ (die nur von $|z| = r$ abhängt) den Ausdruck

$$\pi\delta(r) = -\int_r^R (q^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \varrho(q)\, dq$$

für $r < R$, $= 0$ für $r \geqq R$; aus diesem Ausdruck folgt die unbeschränkte Differentiierbarkeit von $\delta(r)$ für $r > 0$. Die Methode ist eine Momentenmethode, und der Satz von Kronecker-Weyl wird nicht benutzt; entscheidend ist die Ausnutzung des Zusammenhangs des Faltungsprozesses mit der Laplace-Fourierschen Transformierten. Ein Satz am Schluß betr. den Fall $r_1 > \sum_{j=2}^{\infty} r_j$ muß unkorrekt sein, jedenfalls wenn $\sum_{j=2}^{\infty} r_j$ klein ist im Verhältnis zu r_1.

B. Jessen (Cambridge).

Wintner, Aurel: Über die Stetigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktion bei inkommensurablen Partialschwingungen. Math. Z. **37**, 479—480 (1933).

Zusatz zu einer früheren Arbeit des Verf. [Math. Z. **36**, 618—629 (1933); dies. Zbl. **6**, 162]. Die Stetigkeit der Verteilungsfunktion wird durch den Satz abgeleitet, daß bei Faltung von Verteilungsfunktionen die Stetigkeitsgrade nicht verschlechtert werden. Inzwischen bewies Verf. die unbeschränkte Differenzierbarkeit der Verteilungsfunktion; siehe vorst. Referat.

B. Jessen (Cambridge).

Hille, Einar, and J. D. Tamarkin: On a theorem of Paley and Wiener. Ann. of Math., II. s. **34**, 606—614 (1933).

Soit $\mathsf{F}(\zeta)$ mesurable dans $(-\infty, \infty)$ et intégrable dans tout intervalle borné.

En posant $F_N(u) \equiv F_N(u; \mathsf{F}) \equiv (2\pi)^{-1/2} \int_{-N}^{N} e^{-iu\zeta} \mathsf{F}(\zeta)\, d\zeta$, supposons que 1) pour tout $A > 0$ $\int_{-A}^{A} |F_N(u)|\, du \leqq M_A$, 2) il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$ $\int_{-\infty}^{-A} |F_N(u)|\, e^{\varepsilon u}\, du \to 0$, $\int_{A}^{\infty} |F_N(u)|\, e^{-\varepsilon u}\, du \to 0$ lorsque $A \to \infty$, et ceci uniformément par rapport à N. 3) Pour tout A fixe l'ensemble d'intégrales $\int_0^u F_N(t)\, dt$, $-A \leqq u \leqq A$ est uniformément (par rapport à N) et absolument continu. Dans ces conditions il existe une suite $\{N_K\}$, $N_K \to \infty$ et une fonction $F^0(u) \equiv F^0(u; \mathsf{F})$ telles que $\int_0^u F_{N_K}(t)\, dt \to F^0(u)$ lorsque $N_K \to \infty$, et ceci pour tout u fini. La fonction $F^0(u)$ est elle même absolument continue et en posant $F^0(u) = \int_0^u F(t)\, dt$, les auteurs désignent cette fonction $F(u) = F(u, \mathsf{F})$ comme transformée de Fourier de $\mathsf{F}(\zeta)$. — Le théorème final s'énonce de la manière suivante: Soit $0 \leqq \mathsf{F}(\zeta) \subset L_p$, $1 \leqq p \leqq 2$ ($\int_{-\infty}^{\infty} |\mathsf{F}(\zeta)|^p\, d\zeta$ existe). La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $G(\zeta) \subset Lp$ telle que $|G(\zeta)| = \mathsf{F}(\zeta)$, et telle que la transformée de Fourier $F(u; G)$ de $G(\zeta)$ s'annulle pour $u < 0$, est

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log \mathsf{F}(\xi)|\, d\zeta}{1 + \zeta^2} < \infty .$$

Comparer au théorème de Paley et Wiener [Trans. Amer. Math. Soc. 35, 348—355 (1933), Zbl. 6, 257]. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Turnbull, H. W.: Matrices and continued fractions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **53,** 151—163 (1933).

Continuing the work of Sylvester and Whittaker, the author makes a further study of the relation of the continued fraction

$$f \equiv f_n = \frac{1|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \cdots - \frac{a_n|}{|b_n},$$

whose convergents are $f_i = p_i/q_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, to the matrix — continuant —

$$M = \begin{vmatrix} b_0 & c_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_1 & b_1 & c_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & d_2 & b_2 & c_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & d_n & b_n \end{vmatrix} \qquad (a_i = c_i d_i;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

and its reciprocal $M^{-1} \equiv [b_{ij}]$. The author first obtains an interesting expression for M^{-1} involving the residues $f - f_i$. This gives a general expression for any element b_{ij} of M (which includes the result of Sylvester; $b_{00} = f$, as a special case). He then turns to the continued fraction

$$f(x) = \frac{1|}{|b_0 + x} - \frac{a_1|}{|b_1 + x} - \cdots - \frac{a_n}{|b_n + x} \tag{1}$$

(with convergents $f_i(x) = p_i(x)/q_i(x)$), and the associated matrix $M(x)$ obtained by adding x to each principal element of M. The relation

$$-[M^{-1}(x)]^2 = \begin{bmatrix} f'(x) \ldots \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

(Whittaker), combined with the above expression for M^{-1}, yields the following interesting result:

$$f'(x) = -f^2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q_i^2(x)}{a_1 a_2 \cdots a_{i+1}} (f(x) - f_i(x))^2 . \tag{2}$$

In the special case where all a_i and b_i are real, with all $a_i > 0$, the above considerations readily show: $(\alpha) f(x)$ is monoton decreasing for all x; (β) it has $n+1$ distinct poles $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, with jumps from $+\infty$ to $-\infty$; $(\gamma) f(x) = \sum_{i=0}^{n} h_{0i}^2/(\lambda_i + x)$, h_{0i} real. The author next extends his results to infinite continued fractions, by letting $n \to \infty$ in (1, 2), and gives a sufficient condition for the absolute convergence of an infinite series on type (2). Similar results are then obtained for continued fractions of type $\frac{1|}{|1} + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_n x|}{|1}$. $(q_n(x) \neq 0)$ The paper closes with a brief discussion of a more general matrix $A + Bx$, where A and B, independent on x, are of the type M. — [Remarks. (I) The special case: $a_i (> 0)$, b_i real, treated above, is closely related to the theory of orthogonal polynomials, $f(x)$ here being "associated" with a Stieltjes integral $\int_{-\infty}^{\infty} d\psi(y)/(x-y)$, with $\psi(x) \uparrow$ in $(-\infty, \infty)$, (cf. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2nd ed., 1929), and the present paper thus derives in a new and interesting way the well known properties (α, β, γ). (II) Series involving the residues $f - f_i$ and their applications to certain problems in best "approximation" have been given by Tchebycheff (Oeuvres, vol. I, pp. 611—614; 617—636). Ref.]. *J. Shohat.*

Turnbull, H. W.: Matrices and continued fractions. II. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **53**, 208—219 (1933).

In the present paper, as in a previous one under the same title (ibid., pp. 151—163; see this Zbl. **6**, 145) the author studies the connection between continued fractions and matrices (Sylvester, H. T. S. Smith). First, making use of Schweins' identity, he derives an explicit form for the rational reduction of a matrix to diagonal form. From this he shows — and this is the main point of the paper under discussion — that the algorithms of ordinary and generalized continued fractions all are but particular representations of Schweins' general matrix algorithm. Second, generalizing a result due to Whittaker, the author gives a matrix representation for $f'(x)$, $f(x)$ being the leading element of a certain given matrix. (Cf. the previous paper, l. c.) Finally some theorems on determinants are obtained as corrollaries of the aforegoing results.

J. Shohat (Philadelphia).

Reihen:

Vignaux, J. C.: Ein Satz über (L, σ)-summable Integrale. Bol. mat. **6**, 17—18 (1933) [Spanisch].

Vignaux, J.-C.: Sur le produit de séries sommables par la méthode de Borel. Bull. Sci. math., II. s. **57**, 211—219 (1933).

Dans sa thèse M. G. Doetsch a montré qu'en général la série-produit des deux séries sommables par la méthode exponentielle de M. E. Borel n'est pas sommable par cette méthode. En 1932 M. N. Obreschkoff a demontré (voir ce Zbl. **3**, 305; **5**, 249) que la série-produit des deux séries sommables (B) avec les sommes, généralisées u et v est sommable avec la somme $u \cdot v$ par le procédé $(C_1 B)$ qui représente la superposition au procédé de Borel du procédé $(C, 1)$ de Cesàro. M. Vignaux donne dans son article deux théorèmes dont le deuxième, en réalité, n'est qu'un cas particulier du premier. Ce premier théorème prouve que les conditions supplementaires $n a_n = O(1)$ et $n v_n = O(1)$ imposées aux séries facteurs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont suffisantes pour assurer la sommabilité (B) de la série-produit, ces séries facteurs étant supposées sommables (B). Rien ne prouve d'ailleurs que ces conditions ne sont pas surabondantes.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Durfee, W. H.: Convergence factors for double series. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 457—464 (1933).

Verallgemeinerung der früheren Untersuchungen des Verf. [Amer. J. Math. **53**, 817—842 (1931); dies Zbl. **3**, 56] auf Doppelreihen. Es seien $f(t)$ und $g(t)$ L-Funktionen,

die schneller als $\log t$, aber nicht schneller als jede Potenz von t anwachsen. Weiter seien $f(t)$ und $g(t)$ samt ihren $(r-1)$ ersten Ableitungen für $t \geqq 1$ stetig, monoton und von festen Vorzeichen. Wenn die Cesàroschen Mittel $(r-1)$-ster Ordnung von $\sum a_{ij}$ beschränkt gegen s konvergieren, dann ist

$$\sum a_{ij} z^{f(i)} w^{g(j)} \to s$$

als $z \to 1$, $w \to 1$ in festen Winkeln. — Störender Druckfehler: „σ" statt „o".

Hille (New Haven, Conn).

Marcinkiewicz, J.: A new proof of a theorem on Fourier series. J. London Math. Soc. 8, 179 (1933).

Viola, Tullio: Sur les points de convergence des séries trigonométriques générales. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 388—390 (1933).

L'auteur donne, sans démonstration, un théorème sur l'ensemble de points de convergence d'une classe, assez spéciale, de séries trigonométriques à coefficients non tendant vers zéro. *A. Zygmund* (Wilno).

Prasad, B. N.: On the summability of Fourier series and the bounded variation of power series. Proc. London Math. Soc., II. s. **35**, 407—424 (1933).

A series $\sum_0^\infty c_n$ is said to be absolutely summable (A) if the function $\sum_0^\infty c_n r^n$ is of bounded variation in the interval $0 \leq r < 1$. Let

$$f(\theta) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\,. \tag{*}$$

Among others the following results are established. 1. If f is of bounded variation in an interval (α, β), the series in (*) is absolutely summable (A) for $\alpha < \theta < \beta$. 2. The series conjugate to (*) is absolutely summable (A) if

$$\int_0^\pi |f(\theta + t) - f(\theta - t)|\, t^{-1}\, dt < \infty\,.$$

3. If $f \subset L$ the series $\sum_{n=2}^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)/\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varepsilon}$, as well as the conjugate series, is absolutely summable (A) for almost every θ. *A. Zygmund.*

Hille, Einar, and J. D. Tamarkin: Addition to the paper "on the summability of Fourier series II". Ann. of Math., II. s. **34**, 602—605 (1933).

For the notations see the revue in this Zbl. **6**, 302. B denotes the class of all measurable and bounded functions defined in the interval under consideration, $\|f\|_B$ is the essential upper bound of $|f(x)|$. A transformation $\mathfrak{A} = \{a_{mn}\}$ is called (B)-effective if 1° $f(x) \subset B$ implies $\tau_m(x; f) \sim \sum_{n=1}^\infty a_{mn} f_n \varphi_n(x) \subset B$ $(m = 1, 2, \ldots)$, 2° $\|\tau_m(x; f)\|_B \leqq K(f)$ the right hand-side being a constant depending on f, 3° $\tau_m(x; f)$ tends, when $m \to \infty$, asymptotically to $f(x)$. Theorem: The classes of (B)-effective, (L_1)-effective and (L_∞)-effective transformations are identical. *A. Zygmund.*

Smith, A. H.: On the summability of derived series of the Fourier-Lebesgue type. Quart. J. Math., Oxford Ser. **4**, 93—106 (1933).

The author considers the method (α, β) of summation of series which was introduced recently by Bosanquet and Linfoot [J. London. Math. Soc. **6**, 117—126 (1931), this Zbl. **1**, 393; Quart. J. Math., Oxford Ser. **2**, 207—229 (1931), this Zbl. **2**, 388]. He applies this method to the summation of the rth derived of a Fourier series and to the derived of the conjugate of a Fourier series, and establishes the following results. (1) The rth derived series of the Fourier series of a function $f(x) \subset L$, is summable (α, β), where $\alpha = r$, $\beta > 1$, to the generalized rth derivative whenever it exists. (2) The derived series of the Fourier series of a function $f(x)$ of bounded variation is summable $(0, \beta)$ almost everywhere to $f'(x)$, for $\beta > 1$. (3) The series

conjugate to the derived series of a function $f(x)$ of bounded variation is summable $(0, \beta)$, $\beta > 1$, to $\lim_{\eta \to 0} -\frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\, t^{-2} dt$, almost everywhere.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Miranda, C.: Sommazione per diagonali delle serie doppie di Fourier. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 803—806 (1933).

Differentialgleichungen:

Yosida, Kôsaku: A note on Riccati's equation. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **15**, 227—232 (1933).

En s'appuyant sur ce que les valeurs asymptotiques d'une f. méromorphe correspondent aux singularités transcendantes de la f. inverse (Iversen) et sur les recherches de Painlevé sur les singularités des solutions des eq. différentielles, l'auteur montre que l'on peut déterminer toutes les valeurs asymp. possibles des solutions méromorphes de $F(x, y, y') = 0$, F polynome irréductible. Pour une éq. $y' = R(x, y)$, R rationnelle, on sait [Malmquist, voir aussi Yosida, Jap. J. Math. **1933**, ce Zbl. **7**, 120] que l'éq. est de Riccati si elle admet une sol. méromorphe. Les valeurs asymp. possibles de cette sol. sont alors données par les racines d'une équation du second degré formée avec des coefficients de R. Existe-t-il toujours une val. asympt.? Cette question a été résolue affirmativement par Fukuhara. L'auteur avait seulement remarqué qu'il en est ainsi si l'éq. a une solution rationnelle, ce qui le conduit à donner des conditions pour que $Y' = Y^2 + R(x)$, R rationnelle à poles simples, $R(\infty)$ fini, admette une sol. rat. Il montre enfin que si l'éq. de Riccati ne se ramène pas à une éq. linéaire en posant $y(Y - \alpha) = 1$, $\alpha = \text{const}$, tous les défauts et index de multiplicité d'une solution méromorphe sont nuls. En particulier, il n'y a pas de sol. entière (pour ce dernier résultat, comp. Valiron, Lectures on the general theory of integral f., p. 111).

G. Valiron (Paris).

Kemble, Edwin C.: Note on the Sturm-Liouville eigenvalue-eigenfunction problem with singular end-points. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 710—714 (1933).

The author considers the equation $d/dx[p\, dy/dx] - qy + \lambda \varrho y = 0$, in which p, q and ϱ are real and continuous functions of x on the interval $a < x < b$, p and ϱ positive in the interior of the interval; both endpoints are supposed to be singular points and either or both may be at infinity. Solutions of this equation are sought under the general condition that a function $g(x)$ exists such that $\lim_{x \to a} p\,|y|^2 g^{-1} = 0$, and $p\,|y'|^2 g < M$, when $0 < x - a < B$, M and B positive, with a similar condition at b. For this problem he discusses the existence of characteristic values of the parameter λ and of corresponding characteristic functions. It is thought that this formulation of the boundary conditions is sufficiently general to include the physical applications. For the solution of the problem it is assumed that for every value of λ in an interval $(\lambda'\, \lambda'')$ there exist functions $u_\lambda(x)$ and $v_\lambda(x)$ which satisfy the boundary conditions at a and b respectively and which do not have an infinitude of nodes in the vicinity of these points. Under these conditions the author establishes the existence of a discrete set of characteristic values to each of which corresponds essentially one characteristic function. It is shown furthermore that the characteristic values of the parameter λ are the minimum values of the quotient of two integrals for suitably chosen sets of comparison curves.

Arnold Dresden (Swarthmore).

Gallina, Gallo: Sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee. Ist. Lombardo, Rend. II. s. **66**, 399—408 (1933).

Si dimostra un teorema di P. Appell sulle funzioni invarianti degli elementi di un sistema fondamentale di integrali di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee, e lo si applica poi per determinare condizioni necessarie e sufficienti affinchè due sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee abbiano in comune almeno un sistema particolare di integrali.

Autoreferat.

Gallina, Gallo: Sui sistemi integrali comuni a due sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **66,** 470—480 (1933).

Si determinano condizioni necessarie e sufficienti affinchè due sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee abbiano in comune almeno un sistema particolare di integrali, e si mostra come da esse derivi un procedimento che può servire per l'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti qualunque.

Autoreferat.

Carleman, Torsten: Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables. C. R. Acad. Sci., Paris **197,** 471—474 (1933).

Der Autor hat behandelt 1. die eindeutige Bestimmtheit des Cauchyschen Anfangswertproblems für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen $F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0$ unter der Annahme, daß z dreimal stetig differenzierbar ist und F nach den Argumenten stetige Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung besitzt; 2. die analoge Frage für ein elliptisches System der Form

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} + \sum_{q=1}^{n} a_{pq}(x, y) \frac{\partial u_q}{\partial y} = \sum_{q=1}^{n} b_{pq}(x, y)\, u_q \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

mit nichtanalytischen Koeffizienten; 3. die Frage des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Dabei handelt es sich um Ankündigung ohne Beweis oder nähere Ausführung. Bewiesen wird: Wenn $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in einem Gebiet D Lösungen von

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha u + \beta v, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma u + \delta v$$

sind und wenn u, v in einem inneren Punkt von D von unendlich hoher Ordnung verschwinden, dann verschwinden sie in D identisch. (Von $\alpha, \ldots, \delta$ wird nur Stetigkeit gefordert.)

Rellich (Göttingen).

Einaudi, R.: Sulla riduzione del rango dei sistemi canonici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17,** 546—551 (1933).

Bewiesen wird ein Satz, der eine Art Zwischenstellung einnimmt zwischen den folgenden beiden Lieschen Ergebnissen über kanonische konservative Systeme mit n Freiheitsgraden und mit r bekannten unabhängigen Integralen: I. Befinden sich die r Integrale in Involution und sind sie etwa nach Impulsen auflösbar, so kann der Freiheitsgrad durch Variablenvertauschung von n auf $n - r$ heruntergedrückt werden. II. Bilden die r Integrale eine Gruppe, die eine involutorische Untergruppe der (a priori nicht bekannten) Ordnung p besitzt, so kann das System der Ordnung $2n$ durch Quadraturen gelöst werden, sofern $p \geqq n$ ist. — Die Prämissen des Verf. sind nun dieselben wie die von II. mit der Ausnahme, daß für die a priori nicht bekannte Ordnung p jetzt $p < n$ zugelassen wird. Die Behauptung ist entsprechend nicht die Lösbarkeit des Systems der Ordnung $2n$ durch Quadraturen, sondern seine Reduzierbarkeit auf ein System von $2(n - p)$ gewöhnlichen Differenzgleichungen erster Ordnung (daß dieses System kanonisch mit dem Freiheitsgrad $n - p$ ist, wird, im Gegensatz zu I., nicht behauptet). Nebenbei ergibt sich ein Beweis für den Lieschen Satz II. *Wintner.*

Lewy, Hans: Sur une nouvelle formule dans les équations linéaires elliptiques et une application au problème de Cauchy. C. R. Acad. Sci., Paris **197,** 112—113 (1933).

Mitteilung folgender Resultate: 1. Man erhält alle reellen in der Umgebung von $x = y = 0$ existierenden Lösungen der elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda(x, y) \cdot u = 0$$

(a, b, λ analytisch in einer Umgebung von $x = y = 0$) in der Form

$$u(x, y) = Re\left\{k(x, y)\, f(0) + \int_0^1 K(x, y; tx, ty)\, f[t(x + iy)]\, dt\right\}.$$

Dabei bedeutet: k eine analytische Funktion von x und y; f eine beliebige analytische Funktion von $z = x + iy$, regulär in einer Umgebung von $x = y = 0$; $K(x, y; \xi\eta)$ ein komplexwertiges Funktional von a, b, λ, das analytisch von den Argumenten x, y, ξ, η abhängt. 2. Man erhält alle Lösungen der Differentialgleichung, die nur in einer Halbumgebung D ($y \geqq 0$) von $x = y = 0$ existieren, indem man für $f(z)$ die in D analytischen über die x-Achse nicht fortsetzbaren Funktionen wählt. 3. Aus der angegebenen Darstellung folgt: Das Cauchysche Anfangswertproblem kann nicht mit denselben nicht-analytischen Anfangsdaten für $v_{xx} + v_{yy} + \lambda(x, y)\, v = 0$ und $u_{xx} + u_{yy} = 0$ gleichzeitig gelöst werden; $\lambda \neq 0$ analytisch in einer Umgebung von $x = y = 0$.

Rellich (Göttingen).

Tonolo, A.: Formule di rappresentazione degli integrali delle equazioni di Maxwell-Hertz nei mezzi cristallini uniassici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 919 bis 923 (1933).

Chaundy, T. W.: Laplace's operator in curvilinear coordinates. Quart. J. Math., Oxford Ser. **4**, 159—160 (1933).

In this paper a short, direct and simple derivation of the transformation of Laplace's operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in three-dimensional Euclidean space to curvilinear coordinates is given. The method is purely formal and is applicable when the Laplacian is written in oblique (instead of rectangular) Cartesian coordinates in space of n (instead of 3) dimensions. *Murnaghan* (Baltimore).

Sire, Jules: Sur le problème de Dirichlet, la fonction potentielle et l'ensemble des points irréguliers. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 294—296 (1933).

L'aut. associe une fonction harmonique à toute fonction continue sur la frontière S bornée et réduite d'un domaine T, et aussi à certaines fonctions discontinues; en particulier le poids de certains ensembles E dits normaux, parmi lesquels figurent tous les ensembles fermés, est par définition la fonction harmonique $\varphi(P)$ associée à la fonction égale à 1 sur S et à 0 sur $S - E$. La considération des intégrales de Lebesgue-Stieltjes $\int f(q)\, d\varphi(P)$ conduit à un énoncé du problème de Dirichlet pour les fonctions f normales, c.-à.-d. celles pour lesquelles cette intégrale existe. Viennent ensuite une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point-frontière soit régulier, et un théorème indiquant l'existence d'au moins un point régulier. *Georges Giraud.*

Caretti, Maria: Sulle linee di massima pendenza della funzione di Green. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 784—787 (1933).

Einfache Berechnung der Gradientenkurven der Greenschen Funktion der Potentialgleichung für den durch eine Hyperebene begrenzten Halbraum in n Dimensionen.

Willy Feller (Kiel).

Myrberg, P. J.: Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Acta math. **61**, 39—79 (1933).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Existenz der Greenschen Funktion für schlichte Gebiete und Riemannsche Flächen, besonders in ihrer Abhängigkeit von der Menge der Randpunkte. Die Greensche Funktion wird dabei in üblicher Weise durch Ausschöpfung durch „gewöhnliche Riemannsche Flächenstücke" und nachherigen Grenzübergang definiert. Sie ist auch dadurch charakterisiert, daß sie die kleinste unter allen auf F positiven harmonischen Funktionen ist, die in einem gegebenen Punkte einen logarithmischen Pol besitzen. Wenn die Hauptuniformisierende bekannt ist, kann die Greensche Funktion in gewohnter Weise durch eine Poincarésche Reihe dargestellt werden. Es ist weiter bemerkenswert, daß die Greensche Funktion existiert, sobald es nur eine beliebige nach oben oder unten beschränkte, nichtkonstante harmonische Funktion auf der Fläche gibt. — Im Falle eines schlichten Gebietes ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen der Greenschen Funktion und der Randpunktmenge M: Die Greensche Funktion existiert dann und nur dann, wenn der transfinite Durchmesser von M nicht verschwindet. Eine transfinite Nullmenge hat außerdem die

Eigenschaft, daß sie nicht Singularitätenmenge einer beschränkten harmonischen Funktion sein kann. — Im Zusammenhang mit dem transf. Durchmesser führt der Verf. den außerordentlich wohlgetroffenen Begriff des transf. Kerns einer Punktmenge ein. Der transf. Kern umfaßt alle Punkte, deren jede Umgebung eine Teilmenge von nichtverschwindendem transf. Durchmesser enthält. Es gilt dann der neue Satz, daß jede Punktmenge denselben transf. Durchmesser hat wie ihr transf. Kern. Weiter läßt sich beweisen, daß die untere Grenze der Greenschen Funktion in jeder Umgebung eines zum transf. Kern der Randpunktmenge gehörigen Punktes gleich Null ist. Wenn besonders der betreffende Punkt P ein regulärer Punkt ist, d. h. wenn die zu einer hinreichend kleinen Umgebung gehörige Teilmenge mit einem P enthaltenden regulären analytischen Bogen identisch ist, so ist die Greensche Funktion in P harmonisch und gleich Null. — Nach einigen Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen dem transf. Durchmesser und den verschiedenen Maßbestimmungen einer ebenen Punktmenge, welche wenigstens im Prinzip bereits bekannt waren, wird der kompliziertere Fall einer mehrblättrigen Fläche behandelt. Das einfachste Resultat erhält man, wenn das mehrfach bedeckte Gebiet F eine echte Teilfläche einer anderen Riemannschen Fläche F' ist. Dann gibt es auf F eine Greensche Funktion, vorausgesetzt, daß der transf. Kern der Menge der zum Innern von F' gehörigen Randpunkte von F nicht leer ist. Durch konforme Abbildung können Verallgemeinerungen dieses Resultats erhalten werden. *Ahlfors* (Helsingfors).

Fock, V., et N. Muschelišvili: Sur l'équivalence de deux méthodes de réduction du problème plan biharmonique à une équation intégrale. C. R. Acad. Sci., Paris **196,** 1947—1948 (1933).

Die Lösung des biharmonischen Randwertproblems in der Ebene war von den Verff. [C. R. Acad. Sci., Paris **182**, 246 (1926) bzw. Math. Ann. **1932**, 282] unter Verwendung der konformen Abbildung des Gebietes auf den Einheitskreis auf verschiedene Art zurückgeführt auf eine reelle bzw. komplexe Fredholmsche Integralgleichung. Diese werden hier in einfacher Weise ineinander übergeführt (vgl. dies. Zbl. 5, 358 [Muschelišvili]). *K. Friedrichs* (Braunschweig).

Funktionalanalysis:

Broggi, U.: Sull'iterazione dell'operazione $x\dfrac{d}{dx}$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17,** 696—700 (1933).

$\varphi_0(t)$ being a differentiable function, consider the sequence

$$\varphi_h(t) = t\varphi'_{h-1}(t). \qquad (h = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

We can write:

$$\varphi_p(t) = \sum_{h=0}^{p-1} c_{p-h,h}\, t^{p-h} \varphi_0^{(p-h)}(t), \tag{2}$$

and we have to determine the coefficients $c_{r,s}$, which are positive integers independent on t, nor on the nature of $\varphi_0(t)$. Letting in (1, 2) $\varphi_0(t) \equiv t^n, t = 1$, and using the known development

$$n^p = n\frac{\Delta O^p}{1!} + n(n-1)\frac{\Delta^2 O^p}{2!} + \cdots + n(n-1)\ldots(n-p+1)\frac{\Delta^p O^p}{p!}, \tag{3}$$

we get $c_{r,s} = \Delta^r O^{r+s}/r!$, so that

$$\varphi_p(t) = \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\Delta^{p-h} O^p}{(p-h)!} t^{p-h} \varphi_0^{(p-h)}(t). \tag{4}$$

We also have

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+r)} = \frac{c_{r,0}}{x^r} - \frac{c_{r,1}}{x^{r+1}} + \cdots \tag{5}$$

Conversely (3) can be derived from (4), by solving Euler's linear differential equation

$$n^p t^n = t^p y^{(p)} + \frac{\Delta^{p-1} O^p}{(p-1)!} t^{p-1} y^{p-1} + \cdots + \frac{\Delta O^p}{1!} t y'.$$

Similarly we treat the coefficients $\gamma_{r,s}$ in the following relation-inversion of (4):

$$t^r \varphi^{(r)}(t) = \gamma_{r,0}\varphi_r(t) - \gamma_{r,1}\varphi_{r-1}(t) + \cdots + (-1)^{r-1}\gamma_{r,r-1}\varphi_1(t).$$

They can be found by means of (4, 5). We have the expansion

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)\dots(1+rx)} \equiv \frac{1}{1+\gamma_{r+1,1}x + \cdots + \gamma_{r+r,r}x^r} = \frac{1}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \Delta^r O^{r+s} x^s$$

— special case of the power expansion of $(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n$, $n = -1$.

J. Shohat (Philadelphia).

Popovici, C.: Intégration des systèmes d'équations fonctionnelles. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 12—14 (1933).

Verf. betrachtet Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} a^k f[K] + \sum_{k=0}^{q} b^k \varphi[K] = g\,, \\ \sum_{k=0}^{r} c^k f[K] + \sum_{k=0}^{s} d^k \varphi[K] = h\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

f und φ sind gesuchte Funktionen der Variablen x; a^k, b^k, c^k, d^k, g, h wie auch die K gegebene Funktionen von x. Bei der Lösung von (1) müssen zwei Fälle unterschieden werden: α) Die Funktionen $K(x)$ bilden eine Gruppe; dies geschieht z. B. dann, wenn es eine Funktion gibt, sagen wir $1(x)$, so daß alle K als Iterationen gewisser positiver oder negativer Ordnungen von $1(x)$ betrachtet werden können. $O(x)$ soll dabei immer die Funktion x bezeichnen. In diesem Falle deutet der Verf. an, daß man nach Elimination einer der Funktionen f, φ zu einem neuen System gelangt, dessen Lösung nach einer der früher von ihm entwickelten Methoden [z. B. Mathematica Cluj **3**, 49—63 (1930)] gelingt. β) $K(x)$ bilden keine Gruppe. Führt man die Operatoren

$$Af = \sum_{k=0}^{h} a^k f[K] \dots D\varphi = \sum_{k=0}^{s} d^k \varphi[K]$$

ein und bildet $D \cdot B^{-1} g - h = M$, $1 + C - D\,B^{-1} \cdot A = \mathfrak{G}$, so läßt sich eine partikuläre Lösung P durch die formale Reihe

$$f = M + \mathfrak{G}\,M + \mathfrak{G}^{(2)} M + \cdots \mathfrak{G}^{(n)} M + \cdots$$

bestimmen. Unabhängig davon, ob diese Reihe konvergiert oder nicht, gibt es nach den früheren Resultaten des Verf. unendlich viele Lösungen. Die vom Verf. benutzte Symbolik ist stellenweise nicht ganz verständlich. *Schauder* (Paris).

Cinquini, S.: Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 616—621 (1933).

The paper considers a functional equation of the form $\varphi(x) = f(x) + A(x, \varphi_0^x(y))$, where φ and f are continuous functions on $0 \leqq x \leqq 1$, A is a functional operation on $0 \leqq x \leqq 1$, and continuous functions $a \leqq \varphi(y) \leqq b$, which is continuous in x and φ and considered in the form $A(x, \varphi_0^{x'}(y))$ satisfies a boundedness and a Lipschitz condition in y'. The author proves that if for a given A_0, and f_0, there exists a unique solution φ_0 on $0 < l_0 \leqq 1$ such that $\varphi_0(0) = f_0(0)$, then for every $\varepsilon > 0$ it is possible to find an η such that if A and f are in the η-vicinity of A_0 and f_0, respectively, then there exists at least one solution of $\varphi(x) = f(x) + A(x, \varphi_0^x(y))$ in the ε-vicinity of φ_0 on $0 \leqq x \leqq l_0$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Leray, Jean, et Jules Schauder: Topologie et équations fonctionnelles. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 115—117 (1933).

The authors first consider a transformation $y = x - F(x) = \Phi(x)$ of the elements of a region of a normal, linear, complete abstract space. They define uniquely the degree of the transformation at a point, by reducing to the case of a space of a finite number of dimensions, treated by Brouwer [Math. Ann. **71**, 97—115 (1912); see Lefschetz „Topology", 253]. The "total index" of the solutions of the equation

$x - F(x) = 0$ is defined as the degree at the origin of the transformation above. Hence if the total index is not zero, the equation must have a solution. If F depends on a parameter k, then under certain simple conditions the total index is the same for all values of k. The authors have applied these results to partial differential equations of the second order of elliptic type, and in particular to the Dirichlet problem for a quasi-linear equation of elliptic type. They outline the application to this problem, stating the following theorem, with certain hypotheses regarding boundedness which we omit. If the coefficients in the equation depend on a parameter k and the term not involving any second derivative is identically zero for one value of k in an interval, then the Dirichlet problem has a solution for all values of k in the interval.

A. B. Brown (New York).

Maeda, Fumitomo: On the space of completely continuous transformations. J. Sci. Hiroshima Univ. A **3**, 137—163 (1933).

Der Hilbertsche Raum wird dargestellt durch die komplexwertigen Mengenfunktionen $\Phi(E)$, die absolut stetig sind in bezug auf eine Funktion normaler Mengen $\beta(E)$ und für die die Maßform $\int\limits_A |D_{\beta(E)}\,\Phi(a)|^2\,d\beta(E)$ existiert. — $D_{\beta(E)}\,\Phi(a)$ ist die Derivierte nach $\beta(E)$. — Dann sind die linearen Transformationen, für welche T^2 eine endliche Spur besitzt — vollständig stetige Transformationen —, genau diejenigen, die sich darstellen lassen durch

$$T\Phi(E) = \int\limits_A D_{\beta(E')}\,\mathfrak{K}(E, a')\,D_{\beta(E')}\,\Phi(a')\,d\beta(E').$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{K}(E, a')$ die in bezug auf $\beta(E)\,\beta(E')$ absolutstetigen Funktionen der Mengen E, E', für die $\int\limits_A\int\limits_A |D_{\beta(E)}\,D_{\beta(E')}\,\mathfrak{K}(a,a')|^2\,d\beta(E)\,d\beta(E')$ existiert. — Der Beweis spielt sich weitgehend ab im Raum der Transformationen T mit der Maßform Spur T^2 und gründet sich auf die Spektralzerlegung Hermitescher solcher Transformationen.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Wendelin, H.: Über nichtvertauschbare Operatoren. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr **14**, 117—121 (1933).

This paper considers a set of linear operators $O_\varkappa$ on functions $f(x_1, \ldots, x_n)$ of n variables which are such that $O_\varkappa(f)$ is free of the variable $x_\varkappa$. The operators are further supposed to be such that $O_\varkappa(\lambda f) = \lambda\, O_\varkappa(f)$ provided λ is free of $x_\varkappa$ and associated with each operator $O_\varkappa$ is a function $e_\varkappa$ of $x_\varkappa$ alone such that $O_\varkappa(e_\varkappa) = 1$. From this set are constructed the sets $O^{p_1 \ldots p_m}_{k_1 \ldots k_m} = (O^{p_1}_{k_1})\,(O^{p_2}_{k_2})\ldots(O^{p_m}_{k_m})$. The main theorem states that if the set $O^{p_1 p_2}_{ij}$ of simply compound operators possesses for each set of arbitrary assigned numbers A_{ij} a function Φ with the property that $O^{p_1 p_2}_{ij}(\Phi) = A_{ij}$ $(i < j)$ then the set $O^{p_1 \ldots p_n}_{1 \ldots n}$ possesses a similar function Ψ i. e. $O^{p_1 \ldots p_n}_{1 \ldots n}(\Psi) = A_{1\ldots n}$ where the $A_{1\ldots n}$ constitute a set of arbitrary numbers. The proof is only sketched and the paper is purely formal (no characterization, for instance, of the nature of the functions f being given).

Murnaghan (Baltimore).

Bochner, S.: Spektralzerlegung linearer Scharen unitärer Operatoren. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **7/10**, 371—376 (1933).

Der Verf. bemerkt, daß die Methode des Ref. [Math. Z. **30** (1929), § 8] zur Behandlung der zyklischen diskreten unitären Gruppe $\{U^n\}$ auch in dem von M. H. Stone [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **16** (1930)] behandelten Fall einer zyklischen kontinuierlichen unitären Gruppe $\{U^t\}$ ohne weiteres zum Ziele führt, wenn man dabei das von dem Ref. (loc. cit.) zugrunde gelegte Toeplitzsche Kriterium für die Lösbarkeit des diskreten trigonometrischen Momentenproblems durch das entsprechende, im wesentlichen von M. Mathias [Math. Z. **16** (1923)] herrührende, allgemein für Stieltjessche Integrale durch den Verf. [Vorlesungen über Fouriersche Integrale 1932, 76; dies. Zbl. **6**, 110] formulierte, dem Toeplitzschen durchaus analoge Kriterium für die Lös-

barkeit des kontinuierlichen trigonometrischen Momentenproblems ersetzt. Dieselbe Bemerkung hat gleichzeitig mit dem Verf. auch A. Khintchine gemacht [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19** (1933); vgl. nachst. Ref.]. *Wintner* (Baltimore).

Khintchine, A.: The method of spectral reduction in classical dynamics. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 567—573 (1933).

In § 1, der mit einer gleichzeitig erschienenen Arbeit von S. Bochner [S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **7/10** (1933); vgl. vorst. Ref.] im wesentlichen identisch ist, wird gezeigt, daß die Methode des Ref. [Math. Z. **30**, (1929), § 8] zur Behandlung der diskreten unitären Gruppe $\{U^n\}$ auf die von M. H. Stone [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **16** (1930)] behandelte kontinuierliche unitäre Gruppe $\{U^t\}$ übertragen werden kann. Es wird sodann gezeigt, wie die von Carleman [Ark. Mat. Astron. Fys. 22 B (1932); Acta math. **59** (1932); dies. Zbl. **4**, 152 und **5**, 207] sowie von Neumann [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18 (1932); dies. Zbl. **4**, 310] angegebenen Zeitmittelungen der Raummittel und metaphorischen Ergodensätze [vgl. hierzu G. D. Birkhoff, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **17** (1931); dies. Zbl. **3**, 256] höchst einfach aus einem elementaren Grenzwertsatz gefolgert werden können. Es folgen zum Schluß analoge Vereinfachungen zu einer Arbeit von Koopman und von Neumann [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18 (1932); dies. Zbl. **6**, 227]. *Wintner* (Baltimore).

Funktionentheorie:

Tricomi, Francesco: Sulle funzioni di variabile complessa prossime all'analiticità. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 161—170 (1933).

Soit $\omega = u + iv$ une fonction de $z = x + iy$. Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

L'auteur cherche l'influence de „l'erreur d'analycité“ $\delta = 2\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}$ sur la manière dont ces fonctions différent des fonctions analytiques. Dans le cas òu $\omega(0) = 0$ et où l'erreur δ est assez petite par rapport à $|z|$, le lemme de Schwarz est encore valable. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Fréchet, Maurice: Sur les conditions de Cauchy-Riemann. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **8**, 56—57 (1933).

Rogosinski, Werner: Zum Majorantenprinzip der Funktionentheorie. Math. Z. **37**, 210—236 (1933).

Der Verf. unterscheidet scharf zwischen zwei „Richtungen“ des Majorantenprinzips. Dabei ist die eine Richtung das bekannte Lindelöfsche Prinzip, aber auch die andere Richtung kann auf dieses Prinzip zurückgeführt werden, denn es entsteht einfach durch eine Umkehrung der Schlußweise. Die Spaltung in zwei Majorantenprinzipe wirkt deshalb etwas unmotiviert. — Die Abhandlung enthält eine Fülle von Anwendungen der beiden Prinzipe in ziemlich konzentrierter Darstellung. Neu ist die Anwendung des gewöhnlichen Lindelöfschen Prinzips auf Funktionen, die nur durch das Linienelement im Ursprung normiert sind. Das Variationsgebiet der Funktionswerte wird dann als Vereinigungsmenge aller derjenigen Gebiete erhalten, die zu verschiedenen reellen Werten der Ableitung im Nullpunkt gehören. Man erhält so z. B. eine Verallgemeinerung der Harnack-Carathéodoryschen Ungleichungen für Funktionen mit positivem Realteil. Durch Anwendung des „zweiten“ Prinzips erhält man Sätze vom Landauschen Typus. *Ahlfors* (Helsingfors).

Wolff, Julius: Sur l'intégrale de Stieltjes représentant une fonction holomorphe à partie réelle positive. C. R. Acad. Sci, Paris **197**, 17—18 (1933).

$f(x + iy) = u + iv$ sei regulär und $u > 0$ für $x > 0$. In fast allen Punkten der imaginären Achse gilt dann

$$\lim_{x=0} f(x + \alpha i) = \frac{1}{\pi i} \lim_{x=0} \int\limits_{|t-\alpha|>x} \left(\frac{1}{\alpha - t} + \frac{1}{t - i}\right) d\varphi + \lambda \alpha i + \mu + \varphi'(\alpha).$$

Hier ist $\lambda \geqq 0$, μ reell und φ die monotone Funktion $\varphi(t) = \lim_{x=0} \psi(x + t\,i)$, wo

$$\psi(z) = \int_i^z (u\,dy + v\,dx).$$

R. Nevanlinna (Helsinki).

Calugaréano, Georges: Sur le théorème de M. Borel dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre infini. Bul. Soc. şti. Cluj 7, 174—182 (1933).

L'auteur s'est proposé de donner pour les fonctions d'ordre infini des théorèmes analogues à ceux de Borel relatifs à l'ordre fini. $f(z)$ étant méromorphe, $T(r)$ sa fonction caractéristique de Nevanlinna, $r_\nu(x)$ le module du $\nu^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - x$, il introduit notamment les séries

$$\sum_1^\infty \frac{1}{T(s r_\nu)\, C[T(s r_\nu)]}, \quad r_\nu = r_\nu(x), \quad s \geqq 1. \qquad (1)$$

Il donne ces deux propositions: a) Si $C(y)$ est une fonction croissante telle que

$$\int^\infty \frac{dy}{y\,C(y)} \qquad (2)$$

converge, (1) converge quel que soit x si $s > 1$. b) Si (2) diverge et si $T(r)$ vérifie une condition de croissance convenable, (1) diverge pour $s = 1$ pour tous les x sauf deux au plus. a) se déduit de l'inégalité de Jensen-Nevanlinna par des transformations simples. Dans b) la condition de croissance est une de celles considérées par Boutroux (Acta math. **1903**); l'auteur utilise la seconde formule de Nevanlinna mais semble faire, p. 177, un lapsus dans l'interprétation de cette inégalité, de sorte que la question de savoir si b) est vrai pour une fonction quelconque d'ordre infini (vérifiant la condition de croissance) reste ouverte. Dans a) la série (1) peut être remplacée par

$$\sum \frac{\log s_\nu}{T(r_\nu s_\nu)\, C[T(r_\nu s_\nu)]}, \qquad (s_\nu > 1)$$

ce qui permettrait, moyennant un choix convenable de s_ν, de retrouver la précision des résultats de Blumenthal ou de Denjoy. *G. Valiron* (Paris).

Bosanquet, L. S., and M. L. Cartwright: On the Hölder and Cesàro means of an analytic function. Math. Z. 37, 170—192 (1933).

$$\text{Let } \Phi_0(z) = \varphi(z),\ \Phi_k(z) = \frac{1}{\Gamma(K)} \int_0^z (z-u)^{K-1} \varphi(u)\,du,\ k > 0,;\ C^{(K)}(z) = \Gamma(k+1) z^{-K} \Phi_K(z).$$

Two typical results of this paper are as follows. (1) If $\varphi(z)$ is regular and $|\varphi(z)| < \varepsilon x^{-K}$, where $K > 0$ for every $\varepsilon > 0$ and every $x < x_0(\varepsilon)$ in the semicircle $x > 0$, $0 < r = |z| < R$, and if $C^{(k)}(z) \to l$ when $z \to 0$ so that $r < B x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, is satisfied, then $C^{(k')}(z) \to l$, for every $k' \geqq \max[k, K/(1-\alpha)]$, when $z \to 0$ so that $x \geqq 0$, $0 < r < R$. (2) Let D be a convex domain bounded by part of the circle $r = R$, and two simple Jordan curves touching the lines $\theta = \arg z = \pm\beta$ at the origin, $0 < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$. Suppose that $\varphi(z)$ is regular in D and that $C^{(K)}(z) \to 0$ when $z \to 0$ in D. Suppose further that for every $\delta > 0$ there exist $\varrho = \varrho(\delta) > 0$ and $r_0 = r_0(\delta, \varrho)$ such that $|\varphi(z)| < e^{r^{-\varrho}}$ for $|\theta| \leq \beta - \delta$, $0 < r < r_0$. Then, in D, $|C^{(K')}(z)| < \varepsilon (r/d)^{k-k'}$, where $0 \leqq k' \leqq k$ and d is the shortest distance from z to the boundary of D, for every $\varepsilon > 0$ and every $r < r_0(\varepsilon)$. In particular, $\varphi(z) \to 0$ when $z \to 0$ in $|\theta| \leqq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$. It is shown that these results hold when Cesàro means $C^{(K)}(z)$ are replaced by Hölder means defined by $\varphi_K(z) = \frac{1}{z\Gamma(K)} \int_0^z (\log z - \log u)^{K-1} \varphi(u)\,du$, or by $\varphi_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \varphi(u)\,du$, $\varphi_2(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \varphi_1(u)\,du \ldots$, when k is integer. The authors state also the results which are obtained from above by the conformal mapping $f(w) = f[(1-z)/(1+z)] = \varphi(z)$.

Finally, for bounded means, the authors obtain results of the type of Montel theorem. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Minetti, Silvio: Sur la géométrie de l'holospace des fonctions holomorphes dans un même domaine et sur ses liens avec la théorie des équations différentielles ordinaires. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 221—223 (1933).

Es handelt sich um die Einführung einer Metrik im Funktionenraume aller derjenigen Funktionen f, die in einem Gebiete Ω analytisch sind und am Rande dieses Gebietes stetig bleiben. Man kann sich auf den Einheitskreis beschränken. Setzt man dann $f = P_f + i\,Q_f$, $g = P_g + i\,Q_g$, so versteht der Verf. unter der Entfernung $(f\,g)$ den Ausdruck

$$(fg) = \left[\int_0^{2\pi} [P_f(\theta) - P_g(\theta)]^2 d\theta + \int_0^{2\pi} [Q_f(\theta) - Q_g(\theta)]^2 d\theta\right]^{1/2}$$

genommen entlang des Randes von Ω. — Mittels dieses Begriffes der Entfernung zweier analytischer Funktionen wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz (in jedem ganz im Innern von Ω gelegenen Bereiche) einer Folge von analytischen Funktionen f_n abgeleitet. Zu bemerken wäre noch, daß diese Metrik zu keinem vollständigen Raume führt. *Schauder* (Paris).

Cremer, Hubert: Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **84**, 291—324 (1932).

Es sei ζ ein Fixpunkt der in der Umgebung von ζ regulären Funktion $f(z)$, es sei ferner $f'(\zeta) = \alpha$ vom Betrage 1 und keine Einheitswurzel. Das Zentrumproblem, d. h. die Frage nach der Darstellbarkeit von $f(z)$ in der Gestalt

$$f(z) = S^{-1}[\alpha S(z)], \qquad (*)$$

wo $S(z)$ in der Nähe von $z = \zeta$ regulär und von der Form $S(z) = c_1(z - \zeta) + \cdots$, $c_1 \neq 0$, ist, wird in der vorliegenden Arbeit in nicht unwesentlichem Maße gefördert. Im Anschluß an ein früheres Resultat des Verf. [Math. Ann. **98**, 151 (1927)] wird zunächst gezeigt: Ist $f(z)$ eine nichtlineare ganze Funktion und bezeichnet $M_n(r)$ die n-te Iterierte von $\operatorname{Max}_{|z|\leqq r} |f(z)| = M(r)$, genügt ferner α für alle hinreichend große r der Bedingung

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\alpha^n - 1\right|^{\frac{1}{\lg M_n(r)}} = 0,$$

so ist die Funktionalgleichung (*) unlösbar. Bei dem Beweis dieses Satzes spielt eine an sich bemerkenswerte Abschätzung der Koeffizienten der Iterierten von $f(z)$ eine Rolle. Weiterhin können analoge Sätze für gewisse Klassen von Lückenreihen $f(z)$ aufgestellt werden. Schließlich entwickelt der Verf. den engen Zusammenhang zwischen dem Zentrumproblem (*) und dem der Eckenabbildung: Wann kann man eine von zwei sich in ζ schneidenden regulären und durch eine reguläre analytische Abbildung aufeinander bezogenen Kurvenstücken gebildete Ecke durch eine in ζ reguläre Funktion so schlicht abbilden, daß die Bilder dieser Kurven durch eine Drehung aufeinander bezogen sind? *Szegö* (Königsberg i. Pr.).

Pólya, G.: Über analytische Deformationen eines Rechtecks. Ann. of Math., II. s. **34**, 617—620 (1933).

Im Anschluß an ein Lemma von Ahlfors wird ein äußerst elegantes und anschauliches Resultat über die analytische Abbildung eines Rechtecks bewiesen. Man verstehe unter Deformation eines Rechtecks eine eindeutige stetige Abbildung des Rechteckrandes auf eine geschlossene Kurve, die auch mehrfache Punkte haben kann. Wenn die Deformation besonders so beschaffen ist, daß die Bildkurven der kurzen Seiten zwischen die verlängerten kurzen Seiten und die Bildkurven der langen Seiten außerhalb der verlängerten langen Seiten fallen (oder umgekehrt), so spricht man von einer einseitigen Kompression des Rechtecks. Das einfache Resultat des Verf. besagt nun, daß eine einseitige Kompression nicht durch eine im geschlossenen Rechteck analytische Abbildung bewirkt werden kann. Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Cauchyschen

Integralsatz. Der Verf. zeigt noch, daß sein Resultat zu einem einfachen Beweis eines Satzes von Lindelöf führt. *Ahlfors* (Helsingfors).

Rachevsky, P.: Un critérium caractéristique des représentations conformes. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 291—294 (1933).

Man betrachte zwei konforme Abbildungen der komplexen Ebene als äquivalent, falls sie durch lineare Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen auseinander hervorgehen. Zu einer in der Umgebung von Z_0 konformen Abbildung gehört immer eine äquivalente Abbildung von der Form $W = Z + Z^3 + aZ^5 + \ldots$, wo der Koeffizient a im allgemeinen von Z_0 abhängt. Eine Abbildung heiße homogen, falls a konstant ist. Dann läßt sich unter Anwendung der Schwarzschen Ableitung beweisen, daß die einzigen homogenen Transformationen durch die Potenz, die Exponentialfunktion und den Logarithmus gegeben sind. *Ahlfors* (Helsingfors).

Gerschgorin, S.: Über die konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf den Kreis. Rec. math. Moscou **40**, Nr 1, 48—58 u. dtsch. Zusammenfassung 58 (1933) [Russisch].

Let S be a domain of the complex ζ-plane bounded by a simple closed curve C of length l with a continuously turning tangent. Let $z = \varrho e^{i\theta} = \omega(\zeta)$ map S into the interior of the unit circle $|z| = 1$ so that a given interior point ζ_0 is mapped into $z = 0$ and another given point ζ_1 on the boundary C is mapped into $z = 1$. Let $\zeta = \zeta(s)$ be the variable point on the boundary C and $\beta(\zeta)$ be the angle $(\zeta_0, \zeta, \zeta_1)$. By using Cauchy's integral for $\log \omega(\zeta)$ the author derives the integral equation

$$\theta(s) - \frac{1}{\pi}\int_0^l K(s,t)\,\theta(t)\,dt = -2\,\beta(s), \quad K(s,t) = \frac{1}{r}\cos(n_t, r), \quad r = |\zeta(s) - \zeta(t)|.$$

An analogous equation is derived in the case when S is the infinite domain exterior to C. In special cases this equation may be solved approximately. *J. D. Tamarkin.*

Denneberg, Horst: Konforme Abbildung einer Klasse unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **84**, 331—352 (1932).

Koebe hat gezeigt [Math. Z. **7**, 282—296 (1920)], daß jeder endlich-vielfach zusammenhängende schlichte Bereich sich schlicht auf einen von lauter Vollkreisen und Punkten begrenzten Bereich abbilden läßt, und zugleich die Vermutung ausgesprochen, daß ein entsprechender Abbildungssatz für beliebige unendlich-vielfach zusammenhängende schlichte Bereiche gilt. Nachdem auf seine Veranlassung verschiedene Spezialfälle in dieser Richtung behandelt worden sind, beweist der Verf. der vorliegenden Arbeit diese Vermutung unter der folgenden Voraussetzung über die Begrenzungskontinua $B_1, B_2, \ldots$ des gegebenen Bereiches: 1. Der Minimalabstand der Mengen B_μ und B_ν $(\mu \neq \nu)$ ist $\geqq \delta$. 2. Der Durchmesser von B_μ ist $\leqq \Delta$. Hierbei sind δ und Δ feste positive Zahlen. Die Abbildungsfunktion ist bis auf eine lineare Funktion eindeutig bestimmt. Der Beweis beruht auf dem oben genannten Satz von Koebe. *Szegö* (Königsberg i. Pr.).

Tambs Lyche, R.: Remarques sur l'iteration des fonctions de deux variables et les équations fonctionnelles qui s'y rattachent. Norsk Mat. Forenings Skr., II. s. Nr **1/12**, 60—68 (1933).

The author extends to functions of two variables the theorem of Koenigs, that if $f(z)$ is regular at the invariant point $z = \alpha$, and if $f_n(z)$ is the nth iterated of $f(z)$ and $0 < |f'(\alpha)| < 1$, then the ratio $(f_n(z) - \alpha)/(f'(\alpha))^n$ approaches a function $K(z)$ which satisfies the functional equation $K(f(z)) = f'(\alpha)K(z)$. It is shown that if (0,0) is an invariant point of the analytic functions $f(x, y)$ and $g(x, y)$ and an iterative process is defined by $x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})$ $y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1})$ then there exist two functions $K_1(x, y) = \lim_n [by_n + (a - s_2)x_n]/bs_1^n$ and $K_2(x, y) = \lim_n [-by_n - (a - s_1)x_n]/bs_2^n$ where s_1 and s_2 are assumed to be distinct roots of modulus less than unity of $s^2 - (a + b') + (ab' - a'b) = 0$, in which a, b, a', b' are the first partial derivatives

of f and g at (0,0), respectively. It follows that the functional equation $\varphi(f(x, y), g(x, y)) = \lambda\varphi(x, y)$ has a solution φ in the vicinity of (0,0) if and only if λ is of the form $s_1^p s_2^q$, the solution taking the form $\varphi = C(K_1)^p (K_2)^q$, C a constant. The cases where s_1 and s_2 both have modulus greater than unity or are equal is also treated.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Numerische und graphische Methoden.

Bickley, W. G.: A simple method for the numerical solution of differential equations: Note on error and its avoidance. Philos. Mag., VII. s. **15**, 1174—1177 (1933).

Enthält eine Fehlerschätzung für ein früher vom Verf. angegebenes und in diesem Zbl. **4**, 148 referiertes Verfahren. Die Schätzung verwendet Differenzen niedriger Ordnung und kann zur Verbesserung der Resultate benutzt werden. *Th. Zech.*

Knoll, Franz: Über die Wirkungsweise der mechanischen Glättungsverfahren. Bl. Versich.-Math. **2**, 399—406 (1933).

Das mechanische Glättungsverfahren besteht darin, daß man aus der — numerisch — gegebenen Funktion $f(x)$ die neue $g(x)$ durch die Operation P ableitet:

$$g(x) = P \cdot f(x) = \left[p_0 + \sum_1^k p_\alpha (E^{-\alpha} + E^{+\alpha})\right] \cdot f(x).$$

Hierbei bedeutet E das gewöhnliche Symbol der Differenzenrechnung $(1 + \Delta)$, und die p_α sind Zahlen, die $\left(\text{unter der einschränkenden Bedingung } p_0 + 2\sum_1^k p_\alpha = 1\right)$ je nach dem Geschmack der verschiedenen Rechner gewählt worden sind. Das angestrebte Ziel jedes Glättungsverfahrens ist die Zerlegung von $f(x)$ in zwei Summanden $f_1(x)$ und $f_2(x)$, wobei $f_1(x)$ den funktionalen Zusammenhang der untersuchten Erscheinung kennzeichnet und $f_2(x)$ die Störungsquellen erfaßt, also $Pf_1(x) = f_1(x)$ und $Pf_2(x) = 0$. — Verf. leitet hieraus ab, daß f_1 und f_2 einer linearen, homogenen Differenzengleichung von der Ordnung $2k$ genügt, gibt die Form der Lösung dieser Gleichung und zieht hieraus eine Reihe von Schlüssen betreffend sehr gefährliche Verfälschungen des zu glättenden Zusammenhanges, wozu eine unkritische Anwendung des Verfahrens führen kann. Näher untersucht wird die Wirkung der Formeln von Wittstein bzw. Finlaison, Woolhouse, Higham, Spencer, Karup, Schärtlin und King.

Burrau (Kopenhagen).

Russell, J. B.: A method of evaluating the Fourier integral. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol **12**, 274—290 (1933).

Zur praktischen Berechnung der Fourierschen Transformierten einer Funktion $f(\omega)$ wird diese mit $\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \omega$ in eine Reihe

$$f(\omega) = \sum_1^\infty a_n \sin n\vartheta + \sum_1^\infty b_n[(-1)^{n+1} + \cos n\vartheta]$$

entwickelt. Mit

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} e^{2t}}{n!} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [t^n e^{-2t}] = (-1)^{n+1} \frac{2}{n!} [L_n'(2x) - L_n(2x)],$$

wo L_n das n-te Laguerresche Polynom ist, wird dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = \pi \sum_1^\infty b_n R_{n-1}\, e^{-t} - i\pi \sum_1^\infty a_n R_{n-1}\, e^{-t}.$$

An einem numerischen Beispiel aus der Elektrotechnik wird die Brauchbarkeit der Methode gezeigt. *W. Cauer* (Göttingen).

Boisseau, Paul: Sur de nouveaux appareils d'intégration mécanique. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1863—1864 (1933).

Für Planimeter, Integraphen, harmonische Analysatoren usw. ergeben sich Vereinfachungen in der Konstruktion, wenn man die in rechtwinkligen Koordinaten vor-

gelegte Kurve so umzeichnet, daß man die Abszissen auf einen Kreis von beliebigem Radius aufwickelt unter Beibehaltung der früheren Ordinaten. Dann wird ein Integral $\int y^n\,dx$ zu $\int y^n\,d\omega$, wo ω der Winkel des Radiusvektors mit der Anfangsrichtung ist. Wegen Einzelheiten wird auf eine spätere Veröffentlichung verwiesen.

G. Koehler (Erfurt).

Boisseau, Paul: Sur un nouveau procédé de résolution des équations. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 23—24 (1933).

Als Ergänzung der vorhergehenden Mitteilung (vgl. vorst. Ref.) wird eine Methode zur Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$, insbesondere der Form $Ax(1 + x)^n + B(1 + x)^n + C = 0$, angegeben. *G. Koehler* (Erfurt).

Myard, F. E.: Sur un appareil permettant de tracer la dérivée moyenne d'une fonction représentée par sa courbe en coordonnées cartésiennes. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1865—1866 (1933).

Ein Instrument ähnlich dem Differentiator von Hele-Shaw wird angegeben. Einzelheiten sollen in Kürze an anderer Stelle veröffentlicht werden. *G. Koehler.*

Myard, F.-E.: Sur un appareil intégrateur propre à la mesure des aires situées sur des surfaces quelconques. C. R. Accad. Sci., Paris **196**, 1573—1574 (1933).

The planimeter. Engineer, London **156**, 84—85 (1933).

Georgi: Der neue Leichtmetall-Pantograph „Pantofix" (D. R. P.). Z. Vermessgswes. **62**, 363—366 (1933).

Geometrie.

Kubota, Tadahiko: Quelques théorèmes sur le tétraèdre. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **22**, 380—382 (1933).

Die Gerade l schneidet die Ebenen des Tetraeders A_i in den Punkten A_i'. Die Kugeln über A_iA_i' als Durchmesser laufen dann durch zwei Punkte, und die Mitten der Strecken A_iA_i' liegen (daher) auf einer Ebene. Der zweite Teil dieses Satzes ist leicht auf n Dimensionen zu verallgemeinern. Die Verallgemeinerung des ersten Teiles steht aus. *E. A. Weiss* (Bonn).

Heesch, H., und F. Laves: Über dünne Kugelpackungen. Z. Kristallogr. A **85**, 443—453 (1933).

Es werden einige spezielle Kugelpackungen der Koordinationszahlen 3 und 4 untersucht, indem man zusieht, wie sie sich von einer festen Kugel aus durch sog. Nachbarschaftsfiguren aufbauen lassen. Leitender Gesichtspunkt ist dabei die Herabsetzung ihrer Freiheitsgrade. Um möglichst dünne Realisierungen zu erhalten, werden hochsymmetrische Beispiele gewählt. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Pi Calleja, Pedro: Ein Beitrag zur geometrischen Theorie der Polarität. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **8**, 78—83 (1933) [Spanisch].

Scheffer, M.: Kritische Punkte von Kegelschnittsnetzen. Mathematica, Leiden **2**, 88—94 (1933) [Holländisch].

Verf. bespricht die Eigenschaften der kritischen Punkte eines Kegelschnittnetzes; ein kritischer Punkt ist ein gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Kegelschnitte eines zum Netze gehörenden Büschels. *G. Schaake* (Groningen).

Rachevsky, P.: Sur l'interprétation infinitésimale du système des vecteurs duals. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 217—219 (1933).

Die Graden des euklidischen Raums werden durch eine Inversion in die Gesamtheit aller Kreise durch einen festen Punkt O verwandelt. Die Studysche Darstellung der Graden durch duale Vektoren mit Realteil vom Betrag Eins und darauf senkrechtem Dualteil wird so zu einer Darstellung jener Kreise. Und zwar ist der Realteil der Tangentialeinheitsvektor des Kreises in O, der Dualteil steht auf der Ebene des Kreises senkrecht und seine Länge ist der reziproke Kreisradius. Verf. betrachtet den Dualteil als reelles unendlichkleines Korrektionsglied des Realteils, bei Vernachlässigung des

Unendlichkleinen höherer Ordnung, entsprechend der Multiplikationsvorschrift der dualen Zahlen. Diese Auffassung läßt sich anschaulich deuten, wenn man die Kreise nur bis zur Umgebung 2. Ordnung des Punkts O betrachtet (dann kann man statt der Kreise auch jede beliebige durch O gehende Kurve betrachten, die dort eine Krümmung hat). Zum Zweck dieser Deutung muß aber jeder Kreis erst um einen rechten Winkel um die Tangente in O gedreht werden. *Cohn-Vossen* (Locarno).

Knebelman, M. S.: A canonical form for a set of vectors. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 691—696 (1933).

Verf. gibt kanonische Formen für Systeme von Vektoren: 1. Für ein vollständiges System von kontravarianten unabhängigen Vektoren $\xi^{\alpha}_{(i)}(\alpha = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, r \leqq n)$ kann ein Koordinatensystem bestimmt werden, in welchem $\xi^{\alpha}_{(i)} = 0$ für $\alpha > r$ und ferner

$$\xi^i_{(1)} = \delta^i_1; \quad \xi^i_{(2)} = \delta^i_2 \quad (i > 1) \text{ für } x^1 = 0; \ldots;$$
$$\xi^i_{(s)} = \delta^i_s \quad (i > s-1) \text{ für } x^1 = x^2 = \cdots = x^{s-1} = 0; \ldots;$$
$$\xi^r_{(r)} = 1 \text{ für } x^1 = x^2 = \cdots = x^{r-1} = 0.$$

2. Für ein vollständiges System von kovarianten unabhängigen Vektoren $\eta^{(i)}_{\alpha}$ kann ein Koordinatensystem bestimmt werden, in welchem alle Komponenten von $x^{r+1}, \ldots, x^n$ unabhängig sind, während $\eta^{(i)}_{\alpha} = 0$ für $\alpha > r$ und ferner

$$\eta^{(1)}_i = \delta^1_i; \quad \eta^{(2)}_i = \delta^2_i \quad (i > 1) \text{ für } x^1 = 0; \ldots;$$
$$\eta^{(s)}_i = \delta^s_i \quad (i > s-1) \text{ für } x^1 = x^2 = \cdots = x^{s-1} = 0; \ldots;$$
$$\eta^{(r)}_r = 1 \text{ für } x^1 = x^2 = \cdots = x^{r-1} = 0.$$

Griss (Doetinchem).

Scheffer, M.: Über die Einhüllende eines Systems ebener Kurven, die durch eine Parameterdarstellung gegeben sind. Mathematica, Leiden **2**, 62—68 (1933) [Holländisch].

Verf. zeigt, daß es, wenn man die Einhüllende der Kurven $x = \varphi(t, \alpha)$, $y = \psi(t, \alpha)$ (α konstant, t veränderlich) bestimmen will, nicht gleichgültig ist, ob man t oder α aus der Gleichung $\left\{\begin{matrix}\varphi\ \psi \\ t\ \alpha\end{matrix}\right\}$ auflöst. Wenn man nach t auflöst, bekommt man die ganze Einhüllende und evtl. einen Ort von Rückkehrpunkten. Wenn man dagegen nach α auflöst, läuft man Gefahr, einen Teil der Einhüllenden zu vernachlässigen. Weiter zeigt Verf. daß die Einhüllende der Kurven, die man bekommt, wenn man t konstant und α veränderlich nimmt, nicht immer identisch ist mit der obengenannten Einhüllenden. Sechs Beispiele verdeutlichen diese Betrachtungen. *G. Schaake.*

Wiman, A.: Über Mannigfaltigkeiten von geradem Typus. Ark. Mat. Astron. Fys. **23 A**, Nr 15, 1—13 (1933).

Im reellen projektiven Raum werden Mannigfaltigkeiten betrachtet, welche durch Gleichungen der Form

$$\sum_1^k a_i |x_i|^n = 0 \tag{1}$$

definiert werden, wobei n eine reelle positive Zahl ist. Die x_i sind entweder unabhängige Veränderliche oder durch eine Anzahl von $h \leqq k-2$ lineare Relationen verknüpft. Sind sie unabhängig, so ist der topologische Zusammenhang der Mannigfaltigkeit (1) derselbe wie für eine quadratische Mannigfaltigkeit ($n = 2$) mit derselben Signatur. Sind in (1) λ Koeffizienten von demselben Zeichen und $k - \lambda$ von dem entgegengesetzten, wobei $2\lambda \leqq k$ ist, so ist für $n > k-2$ die Ordnung der Mannigfaltigkeit, d. h. die Maximalzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden, gleich 2λ. Nur für ganzzahliges n kann die Ordnung sich verkleinern, und auch nur dann kann eine Gerade ganz oder teilweise auf der Mannigfaltigkeit liegen. — Besteht zwischen den x_i eine lineare Relation, so werden die Gleichungen der Mannigfaltigkeit in der Form

$$\sum_1^k x_i = 0; \quad \sum_1^{\lambda} c_i^{1-n} |x_i|^n - \sum_{\lambda+1}^{k} c_i^{1-n} |x_i|^n = 0$$

angenommen. Der Zusammenhang ist wieder derselbe wie im Fall $n = 2$ und hängt davon ab, welche der drei Fälle

$$c_1 + \cdots + c_\lambda - c_{\lambda+1} - \cdots - c_k \gtreqless 0$$

eintritt. Es werden auch die parabolischen Punkte der Mannigfaltigkeit bestimmt. Schließlich werden einige Beispiele behandelt, darunter auch solche mit $n < 0$, die sich schon topologisch ganz anders verhalten. *van der Waerden* (Leipzig).

Borůvka, O.: Sur une extension des formules de Frenet dans l'espace complexe et leur image réelle. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 109—112 (1933).

Dans l'espace hermitien parabolique K_r, à $r > 1$ dimensions, une courbe C lieu d'un point M fonction analytique d'une variable complexe $z = x + iy$, admet dans chaque point un vecteur unitaire tangent n_0 et $r - 1$ vecteurs normals unitaires $n_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, r - 1)$ deux à deux rectangulaires, liés par des formules analogues à celles de Frenet:

$$dM = (\omega_1 + i\omega_2)\, n_0, \quad dn_\alpha = -R_\alpha (\omega_1 - i\omega_2)\, n_{\alpha-1} - i\varpi_\alpha n_\alpha + R_{\alpha+1}(\omega_1 + i\omega_2)\, n_{\alpha+1}$$
$$(\alpha = 0, 1, \ldots, r - 1; \quad R_0 = R_r = 0);$$

ici les ω, ϖ sont des formes de Pfaff réelles en dx, dy telles que $\varpi_0 + \cdots + \varpi_{r-1} = 0$, et les R sont des fonctions analytiques réelles et positives de x, y, qui jouent le rôle des courbures scalaires de la courbe C au point M. — L'a. donne aussi la signification de ces courbures pour la surface caractéristique image de C dans l'espace euclidien réel S_{2r}, sur lequel se représente comme d'ordinaire K_r, avec une nouvelle caractérisation géométrique de ces surfaces, et énonce quelque résultat plus général relatif à des surfaces plongées dans un espace S_{2r} à courbure constante quelconque.
Beniamino Segre (Bologna).

Algebraische Geometrie:

Vries, Jan de: Ebene Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Mathematica, Leiden **2**, 78—82 (1933) [Holländisch].

Ableitung der wichtigsten Eigenschaften einer unikursalen ebenen Kurve dritter Ordnung (Klasse, Realität der Wendepunkte, Tangentialpunkte usw.) mit Hilfe einer rationalen Parameterdarstellung. *G. Schaake* (Groningen).

Field, Peter: On a rational plane curve with an $(n-2)$-fold point. Math. Z. **37**, 402—404 (1933).

Eine ebene rationale und reelle Kurve n-ter Ordnung besitze einen $(n - 2)$-fachen Punkt 0 und $n - 2$ weitere reelle Doppelpunkte P_i. Durch 0 kann man zwei Geraden a, b ziehen, die die Kurve anderswo berühren. Eine elementare Diskussion über die Gleichung, die die zwei Punkte liefert, wo die Kurve von einer Gerade durch 0 noch geschnitten wird, gibt die Antwort auf verschiedene Realitätsfragen. Sind z. B. die Geraden a, b konjugiert-imaginär, so sind die $n - 2$ Punkte P_i entweder alle Knotenpunkte oder alle isolierte Doppelpunkte. Sind a, b reell und verschieden, so liegen die Knoten P_i in einem der Winkel ab und die isolierten Doppelpunkte P_i im anderen Winkel ab; usw. *E. G. Togliatti* (Genova).

Carnevali, Edoardo: Trasformazione cremoniana reale di una curva piana algebrica reale in un'altra dotata di sole singolarità ordinarie. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **66**, 434—438 (1933).

Du Val, Patrick: On triple planes having branch curves of order not greater than twelve. J. London Math. Soc. **8**, 199—206 (1933).

Es wird untersucht, welche ebenen Kurven der Grade $\leqq 12$ mit gewöhnlichen Singularitäten als Verzweigungskurven von dreifach überdeckten Ebenen auftreten können. Es sind: Kurven 4. Grades mit 3 Spitzen, Kurven 6. Grades mit 6 oder 9 Spitzen, Kurven 8. Grades mit 12 Spitzen, Kurven 10. Grades mit 18 oder 21 Spitzen, Kurven 12. Grades mit 24, 27, 30, 33 oder 36 Spitzen, alle ohne Doppelpunkte. In allen diesen Fällen werden Modelle für die Flächen konstruiert und es wird angegeben, wie sich diese Modelle auf die dreifach überdeckten Ebenen abbilden. Ausgangspunkt der Untersuchung ist das Netz der dreifach überdeckten Geraden, die auf der dreifach überdeckten Ebene liegen, und deren Geschlecht π durch die Formel $2\pi - 2 = n - 6$ gegeben wird, wo n die Ordnung der Verzweigungskurve ist. *van der Waerden.*

Bishara, S.: Double-sixes whose cubic surface and cubic envelope are apolar. J. London Math. Soc. 8, 178 (1933).

Babbage, D. W.: On the transformation of certain singular surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 319—330 (1933).

In einer Abhandlung von M. Noether [Math. Ann. 8, 495 (1875)] gibt es eine Reihe von Beispielen zur Bestimmung der Werte der Invarianten p_a, p_g, p_1, p_2 einer algebraischen Fläche. Die Noetherschen Flächen gehören alle einem 3-dimensionalen Raume an und besitzen alle (nur die allgemeine F^5 ausgeschlossen) gewisse singuläre Linien und Punkte. Verf. gibt hier die birationalen Transformationen jener Flächen in andere singularitätenfreie Flächen in Räumen mit mehr als 3 Dimensionen; in einigen Fällen gibt er auch die Darstellung auf Doppel- oder Dreifachen-Ebenen. Die betrachteten Flächen sind 16. *E. G. Togliatti* (Genova).

Babbage, D. W.: Rational normal octavic surfaces with a double line, in space of five dimensions: Addition. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 405—406 (1933).

Beschreibung und Konstruktion einer rationalen normalen F^8 mit einer Doppelgeraden in einem 5-dimensionalen Raume; das ebene Abbildungssystem der F^8 besteht aus Kurven C^9 mit einem einfachen und 8 dreifachen Basispunkten. Diese F^8 ist den anderen ähnlichen vom Verf. schon beschriebenen Flächen hinzuzufügen (s. dies. Zbl. 6, 128). *E. G. Togliatti* (Genova).

Welchman, W. G.: Bisecant curves of ruled surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 382—388 (1933).

In einem Raume S_{N-2P+1} betrachte man eine normale und nicht spezielle Regelfläche R_P^N der Ordnung N und des Geschlechts P. Auf R_P^N gibt es normale und nicht spezielle Kurven C_π^ν der Ordnung ν und des Geschlechts π, die die ∞^1 Erzeugenden der Regelfläche je zweimal treffen. Verf. beweist, daß C_π^ν der Durchschnitt von R_P^N mit einer Hyperfläche 2. Ordnung ist, immer wenn ν klein genug ist; sonst gibt es auf R_P^N solche C_π^ν, die man nicht als Durchschnitte von R_P^N mit Hyperflächen 2. Ordnung erhalten kann. Der niedrigste Wert der Ordnung ν ist $N - P + 1$. Es folgen verschiedene Beispiele, und Anwendungen auf die hyperelliptischen Kurven, auf die elliptischen Regelflächen usw. *E. G. Togliatti* (Genova).

Severi, F.: La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: II. Le corrispondenze a valenza in senso invariantivo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 759—764 (1933).

Eine Korrespondenz T zwischen den Punkten einer Fläche F, die einem allgemeinen Punkt P eine Punktgruppe Y zuordnet, heißt von der Valenz γ, wenn die Gruppe $Y + \gamma P$ eine Äquivalenzschar durchläuft. Zu den Korrespondenzen von der Valenz Null gehören die in der Note I untersuchten „Zeuthenschen Korr.“ Die Summe zweier Korr. der Valenzen γ_1, γ_2 hat die Valenz $\gamma_1 + \gamma_2$, das Produkt die Valenz $-\gamma_1\gamma_2$. Wenn eine Korr. zwischen zwei Flächen die Valenz 0 hat, so hat die Inverse auch die Valenz 0. Über die Zeuthenschen Korrespondenzen, bei denen Y der vollständige Schnitt von F mit einer $M(P)$ ist, wird noch folgender Satz bewiesen: Jede Zeuthensche (α, β)-Korrespondenz T gehört einem kontinuierlichen System Σ an, deren allgemeines Element S jeden ebenen Schnitt in das Äquivalent eines δ-fachen ebenen Schnittes verwandelt; δ heißt der Rang von S, und die virtuelle Anzahl der Korrespondenzen von S oder T ist $\alpha + \beta + \delta$. *van der Waerden* (Leipzig).

Room, T. G.: A representation of $[k]$'s of $[m]$ by points of $[(m - k)(k + 1)]$. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 331—346 (1933).

Man setze $h = m - k - 1$. Im Raume S_m betrachte man die R_h^{k+2}, Ort von $\infty^1 S_{h-1}$, mit den Gleichungen: $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{m-h} \\ x_h & x_{h+1} & \cdots & x_m \end{vmatrix} = 0$; und im Raume S_n, wo $n = (m - k)(k + 1)'$, betrachte man die ähnliche R_h^{n-h+1} mit den Gleichungen: $\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-h} \\ y_h & y_{h+1} & \cdots & y_n \end{vmatrix} = 0$. Man kann die R_h^{k+2} als eine Projektion der R_h^{n-h+1} auf-

fassen. (Z. B. im Falle des gewöhnlichen Geradenraumes hat man $k=1$, $m=3$, $h=1$, $n=4$; man muß also im S_3 eine kubische Raumkurve betrachten, Projektion einer rationalen normalen C^4.) Ein Unterraum S_{k+1} allgemeiner Lage des Raumes S_m schneidet R_h^{k+2} in $k+2$ Punkten, denen auf R_h^{n-h+1} ebensoviele Punkte entsprechen, die einen S_{k+1} im S_n bestimmen; und umgekehrt. Den S_{k+1} des S_m entsprechen so im S_n die Räume S_{k+1}, die R_h^{n-h+1} $(k+2)$-mal schneiden. Aus den Gleichungen der beiden R_h erhält man mit einfachen Rechnungen, daß allen S_{k+1} des S_m, die durch einen S_k hindurchgehen, diejenige S_{k+1} im S_n entsprechen, die R_h^{n-h+1} $(k+2)$-mal treffen und durch einen Punkt P hindurchgehen; und umgekehrt. Man erhält so eine Darstellung der S_k des S_m auf die Punkte P des S_m. Es folgt die Untersuchung der singulären Elemente der Darstellung und der Mannigfaltigkeiten des Raumes S_n, die den einfachsten S_k-Gebilde des S_m entsprechen. So entsprechen z. B. den linearen S_k-Komplexen des S_m die Hyperflächen V_{n-1}^{k+1} des S_n, die R_h^{n-h+1} mit der Multiplizität k enthalten. Die obige Darstellung führt auch zu einer Darstellung auf den Raum S_n der Grassmannschen $V_{(m-k)(k+1)}$, die die S_k des S_m in der üblichen Weise darstellt.

E. G. Togliatti (Genova).

Wong, B. C.: On a certain linear ∞ r-system of r-ic hypersurfaces in r-space. Amer. J. Math. **55**, 376—380 (1933).

E. Veneroni [Rend. Ist. Lomb. (2) **34**, 640—644 (1901)] hatte zwischen 2 r-dimensionalen Räumen diejenige birationale Transformation studiert, welche den Hyperebenen des ersten Raumes die ∞^r V_{r-1}^r entsprechen läßt, die durch $r+1$ Räume S_{r-2} allgemeiner Lage hindurchgehen. Die Ergebnisse von E. Veneroni sind nicht alle richtig und werden hier korrigiert. Jene ∞^r V_{r-1}^r enthalten, außer den $r+1$ gegebenen S_{r-2}, auch eine V_{r-2} der Ordnung $x=\frac{1}{2}(r+1)(r-2)$, und nicht $(r-1)(r-2)$; es ist die V_{r-2}^x Ort aller Geraden, die die $r+1$ gegebene S_{r-2} treffen. [Der richtige Wert von x folgt aus einer Formel von H. Schubert; s. C. Segre, Enc. d. math. Wiss., III C 7[149].] Und die V_{r-2}^x liegt auf allen V_{r-1}^{r-1}, die durch r beliebige der $r+1$ gegebenen S_{r-2} hindurchgehen. Verf. studiert wieder die Transformation, schreibt ihre Gleichungen und diskutiert auch einen besonderen Fall, wo die Transformation involutorisch wird.

E. G. Togliatti (Genova).

Topologie:

Heesch, H.: Zur Topologie parallelepipedischer Gitter. Z. Kristallogr. A 85, 335 bis 344 (1933).

Hat man eine Zelleinteilung des Raumes, wobei alle Zellen topologisch gleichberechtigt sind, so stellt sich die Frage, welche neuen Einteilungen sich daraus ableiten lassen, wenn man verschiedene Klassen von Zellen unterscheidet. Verf. untersucht diese Frage für das parallelepipedische Gitter bei zwei verschiedenen Klassen (sog. Zweiteilungen). Durch einfaches Kombinieren findet er dabei 9 ebene und 24 räumliche Zweiteilungen.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Mimura: Über die Bogenlänge. Erg. math. Kolloqu. H. **4**, 20—22 (1933).

In answer to a question proposed by Menger, the author proves that if B is an arc with length $l(B)$ then $l(B)=\lambda(B)$ where $\lambda(B)$ is defined as follows: For each finite subset E of B and each connected set S containing E which is the sum of a finite number of intervals, let $i(S)$ denote the sum of the lengths of these intervals and let $k(E)$ be the greatest lower bound of $i(S)$ for all S; then $\lambda(B)$ is the least upper bound of $k(E)$ for all $E \subset B$.

Whyburn (Baltimore).

Evans, G. C.: Zur Dimensionsaxiomatik. Erg. math. Kolloqu. H. 4, 7—9 (1933).

New sets of conditions (axioms) are given which characterize dimensionality functions $D_1(M)$ and $D_2(M)$ of the subsets M of R_n. [In this connection, see Menger, Mh. Math. Phys. **36**, 201 (1930).] The two systems differ chiefly in that one is normalized by means of ordinary (geometric) complexes and the other by means of infinite complexes. Aside from the normalizing axioms, the other conditions used are (1) mono-

tony, (2) invariance with respect to Antoine transformations, i. e., $D_i(M) = D_i(M')$ where M and M' are extendably homeomorphic in the sense that some topological transformation between them can be extended to a topological transformation between their neighborhoods, and (3) that every set M is extendably homeomorphic with a subset of a complex C (resp. infinite complex C') for which $D_1(M) = D_1(C)$ [resp. $D_2(M) = D_2(C')$]. These systems are also formulated in another somewhat more general manner. *Whyburn* (Baltimore).

Menger: Über die lokale Dimension von Mengensummen. Erg. math. Kolloqu. H. 4, 1—2 (1933).

The author studies the relations between the dimension of the sum of two sets at a point p and the dimensions of the summands at p and proves the following result: If M and N are each closed in their sum and separable, then we have:

$$\mathrm{Max}\,(\dim_p M,\ \dim_p N) \leqq \dim_p (M+N) \leqq \mathrm{Max}\,(\dim_p M,\ \dim_p N,\ 1 + \dim M \cdot N).$$

The author remarks that this formula can be extended by induction to any finite number of summands but not to infinitely many, and also that an analogous formula for rational dimensionality can be proven. *G. T. Whyburn* (Baltimore).

Whyburn, G. T.: Decompositions of continua by means of local separating points. Amer. J. Math. 55, 437—457 (1933).

Sei M ein (kompaktes) Kontinuum. Jedem Teilkontinuum C von M sei eine Teilmenge $L(C)$ von M eindeutig zugeordnet. Hat diese Mengenfunktion $L(C)$ gewisse formale Eigenschaften, so existiert zu jedem Punkt p von M eindeutig ein maximales p enthaltendes Teilkontinuum $C(p)$ von M mit abzählbarem $L[C(p)]$. Die Zerlegung von M in die Mengen $C(p)$ ist oberhalb stetig [d. h. für jede konvergente Folge $C(p_1), C(p_2), \ldots$ ist die Limesmenge in einem $C(p)$ enthalten] und daher M eindeutig und stetig abbildbar auf einen „Zerlegungsraum" C, so daß die $C(p)$ die Punkturbildmengen sind. Hieraus ergibt sich durch geeignete Definitionen der Mengenfunktion $L(C)$, daß für jeden Punkt p von M maximale p enthaltende Teilkontinua $C_1(p), \ldots, C_4(p)$ von M existieren, so daß $C_1(p)$ höchstens abzählbar viele lokale Zerlegungspunkte von M enthält (q ist Zerlegungspunkt der Menge A, wenn $A - q$ Summe zweier fremder relativ abgeschlossener Mengen ist, die beide zu der q enthaltenden Komponente von A nicht fremd sind; q ist lokaler Zerlegungspunkt von A, wenn eine Umgebung U von q in A existiert, so daß q Zerlegungspunkt in U ist), $C_2(p)$ höchstens abzählbar viele Zerlegungspunkte von M enthält, $C_3(p)$ höchstens abzählbar viele lokale Zerlegungspunkte besitzt, $C_4(p)$ höchstens abzählbar viele Zerlegungspunkte besitzt. Die Zerlegung von M in die $C_1(p)$ bzw. $C_2(p)$ ist oberhalb stetig, ebenso die in die $C_3(p)$ bzw. $C_4(p)$, falls M erblich (d. h. samt allen Teilkontinua) lokal zusammenhängend ist. Der Zerlegungsraum C_1 ist eine reguläre Kurve mit unabzählbar vielen lokalen Zerlegungspunkten. Jedes $C_3(p)$ ist Summe aller p enthaltenden total imperfekten zusammenhängenden Teilmengen von M. — Ähnliche Sätze erhält man, wenn man statt abzählbar stets diskontinuierlich setzt (diskontinuierlich heißt eine Menge ohne kompaktes Teilkontinuum). *Nöbeling* (Wien).

Nöbeling: Die Projektionen einer kompakten, n-dimensionalen Menge im R_k. Erg. math. Kolloqu. H. 4, 24—25 (1933).

The author proves that if M is an n-dimensional compact subset of a k-dimensional cartesian space R_k then the projection of M on at least one coordinate hyperplane of R_k is likewise n-dimensional. *Whyburn* (Baltimore).

Borsuk: Über Rand- und Kernpunkte kompakter metrischer Räume. Erg. math. Kolloqu. H. 4, 28—32 (1933).

The author introduces and develops the notion of a point p in a self-compact metric set B being n-surrounded in B by a self-compact subset A of B, deriving from its notions of n-kernel points and n-boundary points of a metric space M. The point p of $B - A$ is said to be n-surrounded in B by A provided there exists a continuous transformation f of A into the $(n - 1)$-dimensional sphere S_n which possesses, for each neighborhood $U \subset B - A$ of p, an extension into $B - U$ relative to S_n but has no extension into B relative to S_n. A point p is called an n-kernel point of a space M provided M contains two subset A and B such that p is n-surrounded in B by A, and a point which is not an n-kernel point is called an n-boundary point of M. The author shows that if $B \subset R_n$ and $A = B \cdot \overline{R_n - B}$, then every point of $B - A$ is n-surround-

ed in B by A. In general, if p is n-surrounded in B by A, then for every neighborhood $U \subset B - A$ of p, we have dim $\bar{U} \cdot (B - U) \geqq n - 1$. Regarding n-boundary points and n-kernel points it is proved that (1) the 1-boundary points of a locally connected continuum C are indentical with the endpoints of C, (2) the n-boundary of a subset M of R_n is the set $M \cdot \overline{R_n - M}$, (3) every self-compact subset of the n-boundary of a metric space M is at most $(n - 1)$-dimensional, and (4) every n-kernel point p of M lies in a self-compact subset K of M consisting entirely of n-kernel points of M and such that $\dim_p K \geqq n$. *Whyburn* (Baltimore).

Robinson, Selby: Covering theorems in general topology. Amer. J. Math. **55**, 421—436 (1933).

Anwendungen auf topologische Räume der allgemeinen Ergebnisse von E. W. Chittenden und Verf. über Beziehungen zwischen den Verallgemeinerungen des Borelschen Überdeckungssatzes (Reduzibilität von Überdeckungen) und einigen verwandten Eigenschaften (vgl. dies. Zbl. **6**, 339). Es wird folgende allgemeine Begriffsbildung eingeführt. Seien I und T irgend zwei Eigenschaften von Punktmengen in bezug auf Punkte bzw. Relationen zwischen Punktmengen und Punkten. Eine Menge M wird „von der Eigenschaft I_T im Punkte p" genannt, falls jede in der Relation I zu p stehende Menge zugleich in der Relation T zu mindestens einem Punkte von M steht. Hiermit werden solche Begriffe, wie I_T-Abgeschlossenheit von Mengenfolgen, Reduzibilität von I-Überdeckungen auf T-Überdeckungen usw. gebildet und untersucht. Die Arbeit enthält u. a. Lösung einer Frage von Fréchet, Verallgemeinerungen einiger Sätze von Sierpiński sowie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Separabilität eines Raumes (Th. 18). *B. Knaster* (Warszawa).

Mechanik.

Arrighi, Gino: Il problema cinematico delle rotazioni isocarene dei galleggianti. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 364—370 (1933).

● **Chazy, Jean: Cours de mécanique rationnelle. Tome II. Dynamique des systèmes matériels. (Cours de la fac. des sciences de Paris.)** Paris: Gauthier-Villars 1933. VI, 461 S. u. 182 Fig. Frcs. 80.—.

Es sind hier in besonders klarer Methode und leichter Faßlichkeit die Grundlagen der Dynamik der materiellen Systeme dargestellt: allgemeine Theoreme, Gesetz der Schwerkraft, Bewegung starrer Körper um eine Achse oder um einen fixen Punkt, Grundgesetz der virtuellen Verschiebungen, d'Alembertsches Prinzip, Gleichungen von Lagrange, Theorem von Dirichlet über die Stabilität des Gleichgewichts, kleine Bewegungen, Stöße, Gleichgewicht der Fäden, Elemente der Hydrostatik, der Hydrodynamik, Newtonsches Potential. — Gut ausgewählte, notwendigerweise nicht allzu zahlreiche Beispiele erleichtern wesentlich das Verständnis der allgemeinen Betrachtungen, die ganz speziell von didaktischem Gesichtspunkt aus verfaßt sind. (I. vgl. dies. Zbl. **6**, 225.) *G. Krall* (Roma).

Störmer, Carl: Angenäherte Integration der Bewegungsgleichungen von Elektronen im Felde eines magnetischen Dipols. Z. Astrophys. **6**, 333—344 (1933).

Die Integrale der Bewegungsgleichungen der Bahn eines Elektrons im Felde eines magnetischen Dipols werden zwischen bekannten Funktionen eingeschlossen. Diese Funktionen können durch elliptische Funktionen und Integrale ausgedrückt werden. *Autoreferat.*

Haimovici, M.: Sulle curve di pressione costante. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 633—636 (1933).

The author studies the curves on a surface such that a smooth particle moving on one of them under the nfluence of a conservative field of force exerts a constant pressure on the curve. The surface is defined by its line-element, the field of force by a work-function, and the motion of the particle (and hence the system of curves) by Hamilton's equations. There follows an application to a particular case. *H. S. Ruse.*

Przeborski, A.: Sur les forces dépendant des accélérations. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 300—302 (1933).

The author shows that when the forces acting on a dynamical system depend not only on the positions and velocities of the particles, but also on their accelerations, the parallelogram-law of the composition of forces and the parallelogram-law of the composition of accelerations cannot both be true. *Whittaker* (Edinburgh).

Charpentier, Marie: Sur la semi-continuité d'inclusion des trajectoires de la dynamique. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1771—1773 (1933).

Dirac, P. A. M.: Homogeneous variables in classical dynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 389—400 (1933).

Certain dynamical systems are exceptional in that the ordinary Lagrangian and Hamiltonian methods cannot be used. Thus, for the relativistic motion of a particle whose proper-mass is zero, in field-free space, the Lagrangian function vanishes and the usual Lagrangian method is not applicable; and again, when the electromagnetic field is considered as a dynamical system with an infinite number of degrees of freedom, the momentum conjugate so the scalar electromagnetic potential at any point vanishes identically. The difficulties which arise in these exceptional cases may be overcome by introducing homogeneous variables, making either the velocities or the momenta homogeneous, in either case introducing an extra coordinate, which is treated on the same footing as the previously-existing ones. Thus when the velocities are to be mode homogeneous, we count the time as an extra coordinate q_0, the corresponding velocity $\dot{q}_0$ being equal to unity. We then introduce $\dot{q}_0$ as a factor into certain places in the Lagrangian function in such a way as to make it homogeneous of the first degree in all the velocities. The methods of homogeneous velocities and homogeneous momenta may also be combined, introducing two extra coordinates. The relativistic motion of a single charged particle is worked out as an example. *Whittaker* (Edinburgh).

Stepanoff, W.: Sur le problème de M. Levi-Civita concernant le mouvement moyen. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 526—531 (1933).

Setzt man bei einer nicht identisch verschwindenden reellen Lösung $x=x(t)$, $y=y(t)$ der linearen Differentialgleichungen $dx/dt=\alpha(t)x+\beta(t)y$, $dy/dt=\gamma(t)x+\delta(t)y$, deren Koeffizienten reellwertig, stetig und nach 2π periodisch sind, $\vartheta(t)=\vartheta=\operatorname{arctg} y/x$, wobei die Mehrdeutigkeit des Arkus durch die Anfangsbedingung $0\leqq\vartheta(0)<2\pi$ und durch die Forderung der Stetigkeit von $\vartheta(t)$ behoben wird, so gilt nach Levi-Civita [Ann. École norm. (3) **28**, (1911)] die Zerlegung $\vartheta(t)=\mu t+\omega(t)$, wobei μ eine von den Integrationskonstanten unabhängige Zahl und $\omega(t)$ eine beschränkte Funktion bezeichnet, und zwar kann $\vartheta(t)$ unabhängig von den linearen Differentialgleichungen vermöge einer Differentialgleichung $d\vartheta/dt=f(\vartheta,t)$ charakterisiert werden, wobei f doppelt-periodisch ist [vgl. hierzu H. Kneser, Ann. Mat. pura appl., IV. s. **11** (1933); dies. Zbl. **6**, 304]. Der Verf. hebt mit Rücksicht auf eine Angabe des Ref. (vgl. die vorhin zitierte Besprechung) hervor, daß die allgemeine Lösung von $d\vartheta/dt=f$ bei kommensurablem $\mu\neq 0$ nicht notwendig ein periodisches Restglied $\omega(t)$ besitzt. — Der Ref. hat gezeigt [Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10** (1932); dies. Zbl. **5**, 30], daß im „stabilen" Falle nichtreeller charakteristischer Exponenten λ_1, λ_2 das beschränkte Restglied $\omega(t)$ sogar fastperiodisch ist, daß es aber im „instabilen" Falle reeller λ überhaupt keinen rekurrenten Charakter aufzuweisen braucht (obwohl es auch periodisch sein kann). Der Verf. zeigt nun, daß in dem instabilen Falle in bezug auf das Verhalten der Charakteristiken $\vartheta=\vartheta(t)$ auf dem (ϑ,t)-Torus aus den expliziten Formeln mit derselben Mühe die folgende genauere Aussage abgelesen werden kann: Sind die λ reell, so gibt es, sofern $\lambda_1\neq\lambda_2$ ist, zwei geschlossene Charakteristiken, die zu $t\to+\infty$ bzw. $t\to-\infty$ gehörige Grenzlagen (cycles limites in dem Poincaréschen Sinn) aller übrigen Charakteristiken sind, und zwar fallen die beiden Grenzcharakteristiken zusammen, wenn $\lambda_1=\lambda_2$ wird und auch die Elementarteiler der Monodromiegruppe nicht getrennt bleiben, während im Falle von einfachen Elementarteilern mit

zusammenfallenden Nullstellen alle Charakteristiken geschlossen sind. Letzteres trifft aber zu, auch wenn die λ mit einem rationalen Imaginärteil komplex sind.

Daß μ bei reellen λ ganzzahlig (möglicherweise bei passender Deutung halbzahlig) und bei komplexen λ in dem durch 1 und den Imaginärteil von $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ bestimmten, also höchstens zweigliedrigen Modul enthalten ist, sowie die damit zusammenhängenden Resultate des Verf. sind mit Rücksicht auf die oben zitierten Arbeiten nicht neu. *Wintner.*

Gugino, E.: Sulla curvatura geodetica delle traiettorie dinamiche dei sistemi olonomi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17,** 714—718 (1933).

Let $(\xi^\mu, \eta^\mu, \zeta^\mu)$ be the cartesian coordinates of a particle P_μ of mass m_μ of a holonomic system $P_1, P_2, \ldots, P_N$, (n degrees of freedom) which is specified by n generalised coordinates (x^i). If $T \equiv \frac{1}{2} \sum a_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$ is the kinetic energy, the manifold of configurations W_n specified by $ds^2 = 2\,T\,dt^2$ is a subspace of the $3\,N$-dimensional euclidean manifold E for which $ds^2 = \sum (d y^\mu)^2$, where y^{3i-2}, y^{3i-1}, y^{3i} are respectively $\xi^i \sqrt{m_i}$, $\eta \sqrt{m_i}$, $\zeta \sqrt{m_i}$. Let P be a point of a dynamical trajectory γ of W_n. Then, if X^μ, Y^μ, Z^μ are the components of the external force acting on the particle P_μ, the vector $\boldsymbol{F}$ of E having components defined by $F^{3i-2} = X^i/\sqrt{m_i}$, $F^{3i-1} = Y^i/\sqrt{m_i}$, $F^{3i} = Z^i/\sqrt{m_i}$ may be projected orthogonally on the flat space tangent to W_n at P, giving a vector $\boldsymbol{F}^*$ such that $\boldsymbol{F}^* = \dot{s}^2 \boldsymbol{p} + \ddot{s}\,\boldsymbol{t}$, where s is the arc of γ, $\boldsymbol{p}$ is the geodesic-curvature-vector of γ, $\boldsymbol{t}$ is the unit tangent-vector of γ, and dots denote differentiation with respect to the time. This relation is obtained from the Lagrangian equations of motion, the components of the generalised force-vector Q_i being the covariant components of $\boldsymbol{F}^*$.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Mineur, Henri: La mécanique des masses variables. Le problème des deux corps. Ann. École norm., III. s. **50,** 1—32 u. 65—69 (1933).

Das Zweikörperproblem mit seitlich veränderlichen Massen wird hier eingehend behandelt unter Voraussetzungen, die astronomischen Tatsachen entsprechen. Der erste Teil der Arbeit enthält eine sehr übersichtliche Zusammenstellung der Gründe und Beobachtungstatsachen, die die heutige Astronomie zur Annahme eines Massenverlustes der Sterne zwingen. Die Stellarstatistik zeigt fast direkt ein Abnehmen der Masse mit fortschreitender Masse. Andererseits ist, um die Aufrechterhaltung der Strahlung über kosmische Zeiträume zu verstehen, die Annahme der Ausstrahlung von Masse kaum vermeidlich. — Im zweiten Teil werden die Bewegungsgleichungen bei veränderlicher Masse aufgestellt. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Körper Masse durch sphärische Ausstrahlung verlieren. Der Ausdruck „sphärisch" hat zwei verschiedene Bedeutungen, je nachdem man sich auf den Standpunkt des Relativitätsprinzipes oder des ruhenden Äthers stellt. Im ersten Falle wird gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen dieselben sind wie bei konstanter Masse, $m\frac{dV}{dt} = F$, während sie unter der zweiten Annahme die Levi-Civitasche Form $d m V/dt = F$ erhalten. Im dritten Teil werden die Bewegungsgleichungen, mit dem Newtonschen Gesetz, mit den üblichen Methoden der Störungstheorie diskutiert. Der einzige Unterschied ist der, daß hierbei noch die Massenänderung enthaltende Lagrange-Klammern auftreten. Der vierte Teil enthält analoge Untersuchungen für den Fall eines Einsteinschen Gravitationsfeldes, hier wie überall vorher unter der (astronomisch nahegelegten) Annahme sehr langsamer Massenabnahme. — Der eigentliche Antrieb zu diesen Untersuchungen war wohl der Versuch, die bekannte Relation zwischen Periode und Exzentrizität von Doppelsternen zu erklären. Solange man an der Newtonschen Mechanik festhält, ergibt sich nur ein Anwachsen der Periode, während die Exzentrizität konstant bleibt. Im Einsteinschen Gravitationsfelde enthält indessen die Exzentrizität einen sekulären Faktor. Die Rechnung ergibt jedoch eine im Vergleich mit der Beobachtung viel zu kleine Variation der Exzentrizität. Verf. weist darauf hin, daß vielleicht die Berücksichtigung des Stromes einstürzender Meteore und kosmischer Teilchen ein besseres Resultat liefern könnte. *E. Hopf* (Watertown).

Merlin, Émile: Sur le problème de deux corps à masse décroissante. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1718—1720 (1933).

Der Verf. gibt Differentialrelationen an, die gewisse elementare Aussagen über das zeitliche Verhalten der oskulierenden Exzentrizität u. dgl. gestatten. *Wintner.*

Kiveliovitch, M.: Le nombre des chocs dans le problème des n corps qui s'attirent inversement à une puissance quelconque de la distance. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 224—227 (1933).

Betrachtet werden zunächst diejenigen Lösungen des (nicht restringierten) Dreikörperproblems, bei denen nur binäre Stöße vorkommen. Es wird gefunden, daß es bei einer solchen Bewegung höchstens zwei Stöße geben kann, bei nichtebenen Bewegungen nicht einmal zwei Stöße, und daß bei einer ebenen Lösung im Falle zweier Stöße jeder der drei Körper an einem Stoß teilnehmen muß. In den Beweisen konnte der Ref. die nur angedeuteten Schlußweisen nicht überall verfolgen, vor allem weil Entwicklungen von nur lokaler Gültigkeit entlang der ganzen Bahnkurve in Anspruch genommen zu sein scheinen. In den Resultaten des Verf. ist übrigens u. a. die Aussage enthalten, daß keine periodische Stoßbewegung möglich ist. — Es wird sodann angegeben, daß die Schranken 2 bzw. 1 für die Anzahl der überhaupt möglichen binären Stöße sich im Falle von $n \geqq 3$ Körpern zu $2n - 4$ bzw. $2n - 5$ verallgemeinern, und zwar auch dann, wenn der Exponent des Gravitationsgesetzes nicht der Newtonsche ($= 2$) ist. Indem sich der Verf. nichtbinäre Stöße durch Zusammenfallen von binären entstanden denkt, folgert er für Bewegungen mit beliebigen Stößen, aber mit keinen von den letzteren verschiedenen reellen Singularitäten die allgemeinere Abschätzung $\sum(k-1)\, S_k \leqq 2n - 4$ bzw. $\leqq 2n - 5$, wobei S_k die Anzahl derjenigen Stöße bezeichnet, an denen genau k Körper teilnehmen. Die schon mit Rücksicht auf die Chazyschen Untersuchungen heikle Frage nach der Legalität einer solchen anschaulichen Erzeugung nichtbinärer Stöße wird in der Arbeit nicht berührt. *Wintner* (Baltimore).

Nikliborc, Władysław: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten. II. Math. Z. **36**, 655—676 (1933).

Unter Benutzung und Weiterführung der in der ersten Mitteilung [Math. Z. **34**, 74—90 (1931); dies. Zbl. **2**, 207] ausgebildeten Methoden wird folgendes bewiesen: Liegt derjenige Punkt der gleichmäßig rotierenden homogenen Gleichgewichtsfigur T, dessen Entfernung von dem Lichtensteinschen Äquator maximal ist, auf der dynamischen Rotationsachse, in bezug auf welche diesmal keine geometrische Symmetrie vorausgesetzt wird, so ist die Abplattung $b:a < 5$, wobei $2b$ die Länge der zu der Rotationsachse parallelen maximalen Sehne und a die maximale Entfernung der Punkte von T von der Rotationsachse bezeichnet. Über die Zusammenhangsverhältnisse von T werden keinerlei Einschränkungen gemacht. *Wintner* (Baltimore).

● **Lichtenstein, Leon: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.** Berlin: Julius Springer 1933. VII, 175 S. u. 4 Abb. RM. 15.60.

Der Band ist eine lehrbuchartige Darstellung der allgemeinen Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Himmelskörper, die von dem Verf. und seiner Schule in den letzten 15 Jahren mit mathematischer Strenge entwickelt wurde. Als sein Vorläufer ist Liapounoff mit seinen Untersuchungen über schwach gestörte homogene Ellipsoide sowie über das Clairautsche Problem zu nennen, während Poincarés kühne Ansätze zur Zeit nicht als durchführbar erscheinen. Das Buch beginnt nach einigen potentialtheoretischen Vorbereitungen mit den wenigen Sätzen „im Großen", die bisher sichergestellt werden konnten: Existenz eines Symmetrieäquators, absolute Schranken für die Winkelgeschwindigkeit und für das Volumen bzw. die Abplattung u. dgl. mehr. Es wird sodann zu dem Störungsproblem übergegangen, das alle Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen Ausgangsfigur zu bestimmen verlangt. Für die Störung, d. h. für die Abweichung von der Ausgangsfigur wird eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung gewonnen, wobei der Konvergenzbeweis bereits für die die unbekannte Funktion enthaltenden Funktionalreihen mit Rücksicht auf die in den Kernen auftretenden reziproken Entfernungen bzw. deren Ableitungen feinere potentialtheoretische Abschätzungen aus dem O. Hölderschen Gedankenkreise erfordert, was die Durchführung eines E. Schmidtschen Vorschlags betreffend eine einfache Behandlung des Störungsproblems von vornherein verhindert. Das Problem ist nun, die Existenz der Lösungen dieser kompli-

zierten Funktionalgleichung sicherzustellen, sofern es welche gibt. Wesentlich ist dabei für die allgemeine Theorie, daß die Herleitung der Funktionalgleichung im Gegensatz zu Liapounoffs speziellen analytischen Entwicklungen derart geschieht, daß die darin auftretenden Kerne geometrisch interpretiert werden können. Die homogen-lineare Näherung zu der Funktionalgleichung unendlich hohen Grades ergibt eine symmetrisierbare homogene Fredholmsche Integralgleichung, die stets „triviale", d. h. solche Eigenlösungen zuläßt, die durch Differentiation der durch das Problem geometrisch-dynamisch zugelassenen kontinuierlichen Gruppen gewonnen werden können (gibt es auch nichttriviale Eigenlösungen, so spricht die leider schon eingebürgerte, aber bereits mit Rücksicht auf das Tschebyscheffsche Grenzellipsoid durchaus inkorrekte und irreführende Terminologie früherer Ansätze von einem „Verzweigungsfall"). Nach Elimination aller Eigenlösungen mittels der auf v. Koch und Liapounoff zurückgehenden Methode der Kernzerspaltung wird der Existenzbeweis für die nichtlineare Funktionalgleichung mittels sukzessiver Approximationen durchgeführt, für die der Konvergenzbeweis in den Originalarbeiten des Verf. im Falle homogener Gleichgewichtsfiguren mit weitläufigen potentialtheoretischen Abschätzungen erbracht wurde, jetzt aber unter Benutzung des Cauchyschen Integralsatzes erhebliche Vereinfachungen erfährt. Dann bleibt noch ein an sich elementarer, aber bei manchen Ausgangsfiguren in seinen Einzelheiten langwieriger Schritt übrig, nämlich die Frage, ob die endlich vielen und im wesentlichen algebraischen Bedingungsgleichungen, die durch die Kernzerspaltungen bedingt sind und leider wieder Verzweigungsgleichungen für die fraglichen Parameter heißen, reelle Lösungen besitzen oder nicht. Die Lösbarkeit oder Unlösbarkeit des Störungsproblems hängt von dem Ausfall der Realitätsdiskussion ab, für deren Durchführung mit Rücksicht auf die E. Hölderschen Untersuchungen gerade die oben erwähnte geometrisch-dynamische Deutung der trivialen und manchmal auch weiterer Eigenlösungen von Bedeutung ist. — Die Störungsmethodik des Verf. bringt es mit sich, daß die gestörten Gleichgewichtsfiguren, wenn überhaupt, sich nicht vereinzelt, sondern in linearen Scharen ergeben (ob es isolierte Gleichgewichtsfiguren gibt, ist eine offene Frage) und daß andererseits nur schwach gestörte, d. h. ganz in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur liegende Lösungen erhalten werden (ein zu dem Strömgrenschen analoges Abschlußprinzip, das im Einklang mit dem Verhalten der Flüssigkeitsellipsoide die Fortsetzbarkeit der gefundenen „kleinen" Stücke linearer Scharen bis zu a priori angebbaren Grenzen sichern würde, ist nicht bekannt). Wichtig ist für die Anwendbarkeit der Theorie des Verf., daß die Ausgangsfigur selbst keinesfalls eine Gleichgewichtsfigur zu sein braucht. So kann er u. a. die Existenz der Gleichgewichtsfiguren sicherstellen, die in der klassischen Himmelsmechanik durch das Laplace-Kowalewskische Modell des Saturnringes, durch das Laplacesche Modell des Erdmondes, durch Modelle für Doppelsterne und für den Laplaceschen Urnebel postuliert worden sind. Es folgt sodann die Darstellung der sich daran anschließenden Untersuchungen von Garten über das Rochesche Satelitenproblem [Math. Z. **35**, 684—745 (1932); dies. Zbl. **5**, 223], sowie derjenigen von Maruhn über Existenzfragen in der Laplace-Darwinschen Kosmogonie [Math. Z. **33**, 300—320 (1931); dies. Zbl. **1**, 73]. Die allgemeine Stabilitätstheorie des Verf. und ihre Weiterführung durch E. Hölder ist leider nicht behandelt. Hingegen konnten die neueren Untersuchungen des Verf. über inhomogene Gleichgewichtsfiguren und die Figur der Erde [Math. Z. **36**, 481—562 (1933); dies. Zbl. **6**, 373—374] noch berücksichtigt werden. Auch enthält das Buch manches, was bisher nicht veröffentlicht war, und oft sind die Beweise der Originalarbeiten wesentlich vereinfacht, z. B. bei dem Beweis für die Möglichkeit eines Gleichgewichts bei passender freier Oberfläche in einem willkürlichen Becken eines gravitierenden, gleichmäßig rotierenden, starren Körpers („Gestalt des Weltmeeres"). — Es ist überflüssig, zu betonen, daß die Theorie des Verf. keine astrophysikalischen Fragestellungen, sondern die mathematischen Gleichgewichtsprobleme der klassischen Himmelsmechanik löst, der Verf. ist aber der Hoffnung, daß seine Methoden eine Anpassung auch an die thermischen Prozesse astrophysikalischer Modelle zulassen werden. *Wintner.*

Relativitätstheorie.

Le Roux, J.: Sur une forme nouvelle des formules de Lorentz. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 394—397 (1933).

Le Roux, J.: Le principe de relativité et la loi de la gravitation. Ann. École norm., III. s. **50**, 127—169 (1933).

Das Relativitätsprinzip verlangt, daß die Gesetze für beliebig gegeneinander bewegte Koordinatensysteme gültig sind. Das geeignete mathematische Instrument für die Aufstellung einer derartigen Mechanik sieht der Verf. in der Lieschen Theorie der Transformationsgruppen, nachdem diese durch die in dies. Zbl. **3**, 34; **4**, 423 und **6**, 229 referierten Arbeiten des Verf. durch „kinematische Erweiterung" zu Relativitätsgruppen gemacht worden sind. Da die Beobachtungen unter Zugrundelegung der euklidischen Geometrie gemacht werden, beschränkt sich der Verf. auf die euklidische Gruppe, obwohl die meisten Resultate einer Verallgemeinerung

fähig wären. Die Zeit ist keine selbständige Variable, sie beruht auf dem Vergleich der Bewegungen mit der eines bestimmten herausgegriffenen Systemes (Uhr). Sie erfordert daher keine Erweiterung der Transformationen, sondern die Einbeziehung des „Chronometers" in das betrachtete Gesamtsystem. — Den Entwicklungen sind also die euklidischen Relativitätsgruppen zugrunde zu legen, deren Invariante die gegenseitigen Entfernungen der Massenpunkte und deren Ableitungen sind. Eine weitere mechanische Invariante ist die Masse der Punkte, worunter etwas Ähnliches wie die „Ruhmasse" der Einsteinschen Theorie zu verstehen ist. Der nächste Schritt des Verf. besteht in der Untersuchung der kinetischen Energie eines Punktsystemes $T = \sum (x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{m}{2}$. Diese ist eine Invariante der „statischen Tranformationen"; die sechs infinitesimalen kinematischen Transformationen, auf sie angewendet, ergeben die Impuls- und Drehimpulskomponenten des Gesamtsystems. Die zweifache Anwendung dieser Transformationen ergibt Masse, Schwerpunktslage und Trägheitsmoment des Systems. Man kann nun von T einen invarianten Teil T_0 abspalten. Bezeichnet man nämlich mit T_0 den Minimalwert, den die kinetische Energie in allen zur Gruppe gehörigen Systemen annimmt, so beinhalten die Minimalbedingungen die Bedingungen für die Invarianz, woraus folgt, daß sich T_0 durch die gegenseitigen Entfernungen und deren Ableitungen, also unabhängig vom Koordinatensystem darstellen läßt und eine Invariante der Gruppe ist. Setzt man daher $T = T_0 + \Theta$, so ergibt sich, daß Θ eine quadratische Form der Impuls- und Drehimpulskomponenten ist und gerade den Teil der kinetischen Energie darstellt, der durch die Bewegung des Koordinatensystems gegen S_0, das Koordinatensystem in dem $T = T_0$, entsteht. T_0 ist daher der Teil der kinetischen Energie, der lediglich auf die gegenseitige Bewegung der Punkte zurückgeht, und wird daher als „kinetische Energie der Deformation" bezeichnet. In S_0 ruht der Schwerpunkt und verschwindet der Drehimpuls des Gesamtsystems. Es entspricht also einem Inertialsystem der klassischen Mechanik. — Das Galileische Trägheitsgesetz ist keiner relativistischen Fassung fähig, weil es nur von einem Massenpunkt handelt und die Bahn eines einzelnen Punktes vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus unbestimmbar ist. Auch das Newtonsche Gravitationsgesetz als solches kann nicht relativistisch dargestellt werden, weil es nur die Bewegung zweier Massenpunkte beinhaltet. Diese haben nur die gegenseitige Entfernung und ihre Ableitungen als Invariante, so daß die Raumkoordinaten nicht vollständig definiert werden können. Die Zeit kann zwar definiert werden, doch ist diese Definition beliebig in jedem Koordinatensystem der Gruppe möglich, so daß ein Bewegungsgesetz noch nicht aufgestellt werden kann. Der Verf. geht daher vom Jakobischen Minimalprinzip aus, um das Gravitationsgesetz aufzustellen, wie er dies bereits in der in dies. Zbl. **1**, 429 referierten Arbeit getan hat. — Zwischen dieser Gravitationstheorie und der Newtonschen besteht der wesentliche Unterschied, daß jene verlangt, daß in der Wirkungsfunktion sämtliche Massen berücksichtigt werden müssen, während in dieser einzelne herausgegriffen und betrachtet werden können, dafür aber Inertialsystem und Zeit gegeben sein müssen. In der relativistischen Theorie findet man nun, daß die Bewegungsgleichungen in einem System S_0 $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ sind, also die nämlichen wie in der klassischen Mechanik. Das System S_0 muß aber so bestimmt werden, daß in ihm der Schwerpunkt des Systems ruht und der Gesamtdrehimpuls verschwindet. So wird es verständlich, daß das Inertialsystem im Fixsternhimmel ruht. Auch die Zeit wird nach der Definitionsgleichung (s. oben zitiertes Referat) richtig definiert, denn im Inertialsystem gilt tatsächlich $dt^2 = \frac{\sum m\, ds^2}{2(U + h_0)}$. *Zerner* (Wien).

Hagihara, Yusuke: On the theory of secular aberration. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **15**, 155—174 (1933).

Der Verf. untersucht theoretisch den Einfluß der säkulären Aberration auf die Beobachtung und damit die Möglichkeit, aus Aberrationsbeobachtungen die Bewegung der Sonne durch den Äther zu bestimmen bzw. zwischen klassischer und relativistischer Theorie zu entscheiden, wie dies z. B. Courvoissier versucht hat. — Er betrachtet zu diesem Zwecke drei Koordinatensysteme, von denen II sich mit der Geschwindigkeit v gegen I, III mit der Geschwindigkeit v' gegen I und mit V gegen II bewegt. Im ersten Teil der Untersuchung ist v parallel zu V angenommen, im zweiten Teil beliebig gerichtet. — Im ersten Teil entwickelt der Verf. zunächst Fourierreihen für den Aberrationswinkel. Ist $\pi - \vartheta$ der Winkel, den der Lichtstrahl in I mit v einschließt, $\pi - \vartheta'$ der in II, so folgt aus ($\beta = v/c$) $\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta') = \frac{\beta \sin\vartheta}{1 + \beta\cos\vartheta}$

$$\vartheta - \vartheta' = -\sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^n \frac{1}{n} \beta^n \sin n\vartheta$$

nach der klassischen Theorie, dagegen aus

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\right)=\frac{\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\sin\vartheta}{1+\frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\cos\vartheta}:\vartheta-\vartheta'=-2\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{-\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}}\right)^n\frac{\sin n\vartheta}{n}$$

nach der Relativitätstheorie. Ist ferner $\pi-\Theta$ der Winkel, den der Lichtstrahl in III mit V einschließt und $B=V/c$, $\beta'=v'/c$, so wird nach der klassischen Theorie:

$$\vartheta'-\Theta=B\sin\vartheta+\frac{1}{2}B\beta\sin 2\vartheta-\frac{B\beta^2}{8}(3\sin\vartheta-\sin 3\vartheta)$$
$$-\frac{1}{2}B(\beta'+\beta)\sin 2\vartheta-\frac{1}{2}B(\beta'+\beta)(\sin 3\vartheta+\sin\vartheta)+\frac{B}{3}(\beta'^2+\beta\beta'+\beta^2)\sin 3\vartheta\ldots.$$

Das erste Glied entspricht der üblichen Formel, das zweite der Villarceauschen Korrektur. Zum Vergleich muß die relativistische Formel ebenfalls nach ϑ entwickelt werden:

$$\vartheta'-\Theta=B(1-\beta\beta')\sin\vartheta-\tfrac{1}{4}B(\beta'+\beta)\sin 2\vartheta+\tfrac{1}{12}B(\beta'^2+\beta\beta'+\beta^2)(3\sin\vartheta+\sin 3\vartheta)\ldots.$$

Die Differenz ist zwar für $v=300$ km/sec etwa 0″02, bezieht man aber auf das allein beobachtbare ϑ', so wird auch hier die Differenz kleiner als die Beobachtungsgenauigkeit. Eliminiert man in der relativistischen Formel noch β' und behält nur die linearen Glieder und $B\beta$, so erhält man $\vartheta'-\Theta=B\sin\vartheta\,(1-\beta\cos\vartheta)$, was der Villarceauschen Korrektur in der klassischen Theorie entspricht. Dies zeigt deutlich, daß diese Korrektur vor allem von der Entwicklung nach ϑ statt nach ϑ' herrührt. Bezieht man das System I statt auf den Äther auf einen Planeten, so erhält man die Theorie der Planetenaberration. Auch hier fällt der Unterschied zwischen beiden Theorien unter die Genauigkeitsgrenze. — Im zweiten Teil werden dieselben Betrachtungen für V beliebig durchgeführt. Ist s' der scheinbare Ort des Sterns in II, S der in III, so erhält der Verf. schließlich nach der relativistischen Theorie

$$s'S=B\sin(SV)\left\{1+\frac{\beta'}{2}\cos(Sv')-\frac{\beta}{2}\cos(vS')\right\}$$

und

$$s'S=B\sin(SV)\left\{1+\beta'\cos(Sv')-\beta\cos(vS)\right\}$$

nach der klassischen Theorie, was eine Verallgemeinerung der Villarceauschen Korrektur darstellt. Natürlich bleiben die im ersten Teil angestellten Überlegungen aufrecht.

Zerner (Wien).

Infeld, L., und B. L. van der Waerden: Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **7/10**, 380—401 (1933).

Infeld, L., und B. L. van der Waerden: Berichtigung zu der Arbeit: „Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie". S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **11/13**, 474 (1933).

Verff. beabsichtigen, die bekannte van der Waerdensche Spinoranalysis auf die allgemeine Relativitätstheorie zu erweitern, und zwar unter Vermeidung sowohl der unnötigen orthogonalen Bestimmungszahlen („n-Beinkomponenten") als der viel zu komplizierten Methode von Schrödinger. Nach van der Waerden kann man die Indizes der (zweikomponentigen; auf diese beschränken sich Verff.) Spingrößen mittels eines Spinbivektors $\gamma_{\lambda\mu}$ herauf- und herunterziehen, falls ein solcher definiert ist („γ-Methode"). Weil dies aber nicht der Fall ist, behandeln Verff. daneben die Schoutensche Methode, statt $\gamma_{\lambda\mu}$ die Spinbivektordichte $\varepsilon_{\lambda\mu}$ vom Gewicht -1 zu verwenden, deren Bestimmungszahlen (in bezug auf jedes Koordinatensystem) ± 1 oder 0 sind („ε-Methode"). [Die sich auf die letztere Methode beziehenden Ausführungen sind zum Teil falsch, weil Verff. Weylsche Spinvektordichten ψ^μ, χ^μ vom Gewicht $^1/_2$ einführen und irrtümlicherweise annehmen, daß dann ψ_μ, χ_μ Weylsche Dichten vom Gewicht $-^1/_2$ werden, was nicht der Fall ist, weil $\varepsilon_{\lambda\mu}$ keine Weylsche, sondern eine gewöhnliche Dichte ist (vgl. die Berichtigung).] Bemerkenswert ist noch der Ansatz der Verff., die Gravitationswirkung des Elektrons auf sich selbst dadurch zu berechnen, daß der

sich aus dem bekannten Ausdruck für den Materietensor T_{kl} ergebende Wert für den Krümmungsskalar $R = -\varkappa T = -2i\varkappa(\alpha\chi_\lambda\psi^\lambda - \bar{\alpha}\chi_{\dot\lambda}\psi^{\dot\lambda})$, $\alpha = \frac{2\pi imc}{h\sqrt{2}}$ in die Wellengleichung eingesetzt wird. Dies ergibt die nichtlinearen Gleichungen:

$$g^{kl}\psi^\mu|_{lk} - \frac{i}{2}\varkappa\psi^\mu(\alpha\chi_\lambda\psi^\lambda - \bar{\alpha}\chi_{\dot\lambda}\psi^{\dot\lambda}) = -2\alpha\bar{\alpha}\psi^\mu,$$

$$g^{kl}\chi_{\dot\mu}|_{lk} - \frac{i}{2}\varkappa\chi_{\dot\mu}(\alpha\chi_\lambda\psi^\lambda - \bar{\alpha}\chi_{\dot\lambda}\psi^{\dot\lambda}) = -2\alpha\bar{\alpha}\chi_{\dot\mu},$$

in denen das zweite Glied links offenbar sehr klein ist. *D. van Dantzig* (Delft).

Mie, Gustav: Die Geometrie der Spinoren. Ann. Physik, V. F. **17**, 465—500 (1933).

Das Ziel ist, zu zeigen, daß ein 4-komponentiger Spinor ψ nicht nur 2, sondern 4 orthogonale Weltvektoren in invarianter Weise definiert. Um dazu zu gelangen, werden weitere 4 Spinorkomponenten durch $\psi_5 = \overline{\psi_1}, \ldots, \psi_8 = \overline{\psi_4}$ definiert, die mit $\psi_1, \ldots, \psi_4$ zu einer 8-reihigen Spalte ψ vereinigt werden, und es wird

$$a_h^i = \psi^\dagger \alpha_h^i \psi$$

gesetzt, wobei α_h^i numerisch gegebene Matrizes sind. Die 4 Vektoren $a_h^1, a_h^2, a_h^3, a_h^4$ sind dann orthogonal im Sinne der euklidischen Metrik $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Ein Spinor ψ definiert somit eine orthogonale Matrix (a_h^i). Auf Grund dieser Zuordnung kann man Produkte von Spinoren definieren. Das Transformationsgesetz der Spinoren lautet so: Bei einer Koordinatentransformation in der Welt werden die ψ-Komponenten so transformiert, daß die zugeordneten Vektoren $a_h^1, \ldots, a_h^4$ geometrisch dieselben bleiben.

Es scheint dem Ref., daß die ganzen Entwicklungen nur für eine euklidische Metrik gelten und nicht (wie Verf. meint) durch die Subst. $x_4 = j x_0$ auf eine Lorentzsche Metrik übertragen werden können; denn durch diese Subst. bleiben die orthogonalen Vektoren a_h^i nicht mehr reell und die Matrix (a_h^i) stellt keine reelle Lorentz-Transformation dar. Wollte man eine reelle Lorentz-Transformation erhalten, so müßte man in den Formeln die Bedingungen $\psi_5 = \psi_1$, usw. durch andere Realitätsbedingungen ersetzen. *van der Waerden* (Leipzig).

Racine, Ch.: Sur une classe de solutions des équations de la gravitation d'Einstein. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 302—304 (1933).

Der von Verf. betrachteten Lösungsklasse der Einsteinschen Schwerefeldgleichungen liegt naturgemäß eine spezielle Klasse raumzeitlicher Kontinua zugrunde, und zwar die der Metrik:

$$ds^2 = (1 - \varepsilon_{00})\,dt^2 - \sum_{i,j=1}^{3}(\delta_i^j + \varepsilon_{ij})\,dx^i\,dx^j.$$

Versteht man dabei unter ε_{ij} Funktionen der x und gewisser Parameter μ, welche (abgesehen von ihren sonstigen notwendigen Stetigkeits- und Differentiierbarkeitseigenschaften) für $\mu = 0$ samt ihren Ableitungen bis einschließlich dritter Ordnung verschwinden — Räume dieser Art nennt Verf. „euklidischen Räumen in dritter Ordnung unendlich benachbarte Riemannsche Räume" —, so gelingt es unter Hinzunahme einiger weiterer plausibler allgemeiner Voraussetzungen (Regularität und Homöomorphie zum euklidischen Raum von vier Dimensionen usw.), die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen derart stark zu determinieren, daß die Forderung singularitätenfreier Lösungen bereits nur mehr ein euklidisches raumzeitliches Kontinuum zur Folge hat. *M. Pinl* (Berlin).

Carr, A. J.: Solutions inside the sphere and cylinder on Einstein's theory. Proc. London Math. Soc., II. s. **35**, 523—539 (1933).

For a metric of the type $ds^2 = -e^\lambda dx_1^2 - e^\mu dx_2^2 - e^\nu dx_3^2 + e^\varrho dx_4^2$, where $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ are functions of x_1 and x_2 only, there are only three independent gravitational equations $G_\alpha^\beta - \frac{1}{2} g_\alpha^\beta G = -2\varkappa T_\alpha^\beta$ available for the determination of the four functions $\lambda, \mu, \nu, \varrho$, the others being either identically satisfied or connected with the three equations through the divergence-relations $(T_\alpha^\beta)_\beta = 0$. So any relation may be imposed upon $\lambda, \mu, \nu, \varrho$, say $a\lambda + b\mu + c\nu + d\varrho = \varphi(x_1, x_2)$, where a, b, c, d are

any given constants and φ any given function of x_1, x_2. The author deals with cases in which $\lambda, \mu, \varrho, T_1^1, T_2^2, T_4^4$ are functions of x_1 only, and $T_\alpha^\beta = 0$ $(\alpha \neq \beta)$. From the divergence-relations it follows that either $T_3^3 = T_4^4$, or $\partial \nu / \partial x_2 = 0$. The former of these equations leads to spherically symmetric solutions, e. g. that of Combridge for a spherical shell. The latter yields cylindrical solutions, in which $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ are all functions of x_1 only. A large number of cases is considered, corresponding to particular choices of a, b, c, d, φ. In some of these the author neglects powers of $\varkappa$ higher than the first, but many of the solutions are exact. He does not however give all integrable cases, remarking that he has selected the least eccentric and most interesting. As a rule no physical interpretation is attempted. Most of the solutions are general in the sense that a wide degree of arbitrariness is allowed in the choice of the non-zero components of the energy tensor T_α^β. *H. S. Ruse* (Edinburgh).

Kermack, W. O., and W. H. McCrea: On Milne's theory of world structure. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 519—529 (1933).

Ausführliche und sorgfältige Kritik der Arbeit von E. A. Milne, Z. Astrophys. **6**, 1—95 (1933) (dies. Zbl. **6**, 233). *Heckmann* (Göttingen).

Takéuchi, Tokio: Universe without curvature. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **15**, 217—221 (1933).

Ausgehend vom Linienelement $ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2\,d\sigma^2$ und den für eine ebene Welt geltenden Differentialgleichungen,

$$3\dot{R}^2/c^2R^2 - \Lambda = \varkappa c^2 \varrho_{00}(t) \quad \text{und} \quad -\frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} + \Lambda = \varkappa p_0(t),$$

diskutiert der Verf. die möglichen Lösungen. Aus der ersten Differentialgleichung könnte Λ bestimmt werden, doch sind die Angaben über $\varrho_{00}(t)$, die Ruhdichte der Masse hierzu, noch zu ungenau, als daß auch nur das Vorzeichen bestimmt werden könnte. Es werden daher Lösungen für alle Werte von Λ angegeben. Zunächst folgt aus beiden Gleichungen $\varkappa(c^2\varrho_{00} + p_0) = -\frac{2}{c^2}\frac{d}{dt}\dot{R}/R$; da sowohl ϱ_{00} als auch p_0, der Ruhwert des Druckes der Strahlung und der Materie, positiv sein muß, bedeutet das, daß $\frac{d}{dt}\dot{R}/R$ negativ ist. — Für die Intergration wird zunächst $c\varrho_{00}R^3$ konstant, und zwar gleich E angenommen. Dann ergibt sich für $\Lambda = 0$ und $R_0 = 0$ 1. $t = \pm\frac{2R^{3/2}}{c\sqrt{3\varkappa E}}$ und $\varkappa c^2\varrho_{00} = \frac{4}{3c^2t^2}$, 2. für $\Lambda < 0$ $t = -\frac{2}{c\sqrt{-3\Lambda}}\sin^{-1}z\Big|_{Z=\sqrt{1+\Lambda R_0^3/\varkappa E}}^{Z=\sqrt{1+\Lambda R^3/\varkappa E}}$ und mit $R_0 = \left(\frac{\varkappa E}{-\Lambda}\right)^{1/3}$ eine oszillierende Welt $R^3 = -\frac{\varkappa E}{\Lambda}\left(1 - \sin^2\frac{\sqrt{3}}{2}c\sqrt{-\Lambda}t\right)$, 3. für $\Lambda > 0$ und $R_0 = 0$ $(\Lambda/\varkappa E)^{\frac{1}{2}}R^{3/2} = \operatorname{coh}\frac{\sqrt{3}}{2}c\sqrt{\Lambda}t$. Als zweite Annahme wird $p_0 = 0$ gesetzt, dann wird 1. $\Lambda = 0$, $R = $ konst. und $R = c_1 t^{2/3}$; 2. für $\Lambda < 0$, $R_0 = 0$ $R^{3/2} = c_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}c\sqrt{-\Lambda}t$; 3. für $\Lambda > 0$ $R^{3/2} = c_1 \operatorname{coh}\frac{\sqrt{3}}{2}c\sqrt{\Lambda}(t + c_2)$ endlich für $\varrho_{00} = 0$ $R_0 = R_0 e^{\pm c\sqrt{\Lambda/3}t}$, wenn $\Lambda > 0$. Zum Schlusse zeigt der Verf., daß die Gesamtenergie dieser Welten gleich Null ist. *Zerner* (Wien).

Donder, Th. de, et Y. Dupont: Théorie relativiste de l'élasticité et de l'électromagnétostriction. II. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **18**, 782—790 (1932).

Donder, Th. de, et Y. Dupont: Théorie relativiste de l'élasticité et de l'électromagnétostriction. III. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **18**, 899—910 (1932).

Donder, Th. de, et Y. Dupont: Théorie relativiste de l'élasticité et de l'électromagnétostriction. IV. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 370—378 (1933).

Eine Reihe von Aufsätzen, in welchen die Gleichungen der Elektrodynamik, der Elastizitätstheorie und der Thermodynamik in allgemein-relativistischer Form umgeschrieben werden. Die Betrachtungen der Verff. sind rein formaler Natur und dürften kaum eine physikalische Bedeutung haben (vgl. dies. Zbl. 5, 320). *V. Fock.*

Quantentheorie.

Morand, Max: Sur les principes de la physique. II. mém. Mém. Soc. Roy. Sci. Liége, III. s. **18**, H. 2, 1—37 (1933).

Klein, O.: Zur Frage der quasimechanischen Lösung der quantenmechanischen Wellengleichung. Z. Physik **80**, 792—803 (1933).

Es wird gezeigt, daß man eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer unabhängigen Variablen in eine solche erster Ordnung überführen kann, deren Koeffizienten Matrizen sind. Die Integration dieser Gleichung wird durch ein neues Approximationsverfahren geliefert, das für den Fall der Schrödingerschen und Diracschen Wellengleichung in erster Näherung auf die Gleichungen der Mechanik führt. Für Einzelheiten muß auf das Original verwiesen werden. *O. Halpern* (New York).

Rumer, Georg: Nichtkanonische Transformationen und das elektromagnetische Feld. Z. Physik **83**, 351—353 (1933).

Die übliche Vorschrift, das elektromagnetische Feld in die quantenmechanische Wellengleichung einzuführen, lautet bekanntlich: man ersetze die Impulsoperatoren p_i durch $P_i = p_i + \frac{e}{c}\varphi_i$ (φ_i Potentiale). Verf. versucht nun, diese Vorschrift durch eine andere zu ersetzen: Der Energieoperator H' mit Feld soll aus dem Operator H ohne Feld durch die nichtkanonische Transformation $H' = D^+ H D$ hervorgehen, wo D ein geeignet gewählter (nichtunitärer) Operator ist. Verf. versucht ferner, auf diese Weise das Coulombsche Feld in die Diracgleichung einzuführen. Zum Schluß werden einige allgemeine Bemerkungen über die hier vorgeschlagene Erweiterung der Transformationstheorie gemacht. *V. Fock* (Leningrad).

Jordan, P.: Über die Multiplikation quantenmechanischer Größen. Z. Physik **80**, 285—291 (1933).

Bekanntlich ist die Multiplikation quantenmechanischer Größen nicht kommutativ, wohl aber assoziativ, also: $ab \neq ba$, aber $(ab)c = a(bc)$. Interessieren wir uns aber ausschließlich für die mit Hilfe eines makroskopischen Meßapparates an einem atomaren System beobachtbaren Größen, so stellt sich heraus, daß hierfür außer Potenzen einer quantenmechanischen Größe nur noch symmetrisierte Produkte zweier Größen von der Gestalt $(ab + ba)$ in Betracht kommen. Die Bildung derartiger Ausdrücke nennt Jordan Quasi-Multiplikation; diese ist kommutativ, hingegen nicht mehr assoziativ. Es ist offenbar

$$(ab + ba)c + c(ab + ba) \neq a(bc + cb) + (bc + cb)a.$$

Doch gilt die Assoziativität in dem speziellen Fall, daß die Größe c gleich a^2 wird. Die Beschränkung auf die Quasi-Multiplikation, die für den Fall der Wechselwirkung zwischen Meßapparat und Einzelsystem erlaubt wäre, ist aber bei Wechselwirkung mehrerer Atomsysteme zu weitgehend, da hier der quantentheoretische Formalismus die Verwendung der nicht-kommutativen Multiplikation erfordert. Verf. schlägt nun vor, die Assoziativität der gewöhnlichen Multiplikation soweit einzuschränken, als es für die in manchen Fällen physikalische elementarere Quasi-Multiplikation zutrifft. Dies würde für den aus physikalischen Gründen notwendig gewordenen Umbau der Theorie große Freiheiten eröffnen. *O. Halpern* (New York).

Laporte, Otto: Note on Kowalewski's top in quantum mechanics. Physic. Rev., II. s. **43**, 548—551 (1933).

Der Verf. beschäftigt sich mit dem quantenmechanischen Analogon zu dem Kowalewskischen Kreisel. Bei diesem sind zwei Trägheitsmomente einander gleich und halb so groß wie das dritte, während der Schwerpunkt des Systems in der Ebene senkrecht zur Figurenachse angenommen wird. Es wird gezeigt, daß auch in der Quantenmechanik neben den Integralen, die Erhaltung von Energie und Drehimpuls aussprechen, ein drittes algebraisches Integral existiert, das für einen verschwindend kleinen Wert des Wirkungsquantums in den klassischen Ausdruck übergeht.

O. Halpern (New York).

Darrow, Karl K.: Contemporary advances in physics. XXVI.: The nucleus. I. Bell Syst. Techn. J. **12**, 288—330 (1933).

Gapon, E. N.: Zur Theorie des Atomkerns. IV. Z. Physik **84**, 509—519 (1933).

Betrachtungen über die Massendefekte der einzelnen im Kern angenommenen intermediären Bausteine sowie über deren relative Bindung aneinander. (III. vgl. dies. Zbl. **6**, 378.) *G. Beck* (Wien).

Gapon, E. N.: Zur Theorie des Atomkerns. V. Z. Physik **84**, 520—530 (1933).

Diskussion der verschiedenen möglichen erzwungenen und spontanen Umwandlungstypen von Atomkernen. *G. Beck* (Wien).

Hylleraas, Egil A.: Wellenmechanische Berechnung der Rydbergkorrektion der Heliumterme. Z. Physik **83**, 739—764 (1933).

Die He-Terme werden in der Form $-4Rh - Rh/(n+\delta)^2$ dargestellt; R = Rydbergkonstante, n = Hauptquantenzahl, δ = Rydbergkorrektion. δ wird nach dem Ritzschen Verfahren berechnet, zunächst unter Vernachlässigung der Polarisation, d. h. man läßt bei dem Ritzschen Variationsproblem nur Eigenfunktionen zu, die aus Produkten zweier Funktionen der einzelnen Elektronen bestehen. Mit den so gefundenen Eigenfunktionen kann man die Polarisation nachträglich angenähert berechnen, indem man die Polarisation als quadratischen Starkeffekt des Ions im Feld des äußeren Elektrons ansetzt. Die berechneten δ-Werte stimmen mit den beobachteten gut überein. *Bechert* (München).

Johnson jr., M. H., and G. Breit: The magnetic interaction of a valence electron with inner shells. Physic. Rev., II. s. **44**, 77—83 (1933).

In einem atomaren System mit einer abgeschlossenen Elektronenschale und einem äußeren Elektron wird die Wechselwirkungsenergie zwischen Schale und Elektron berechnet. Die Dublettaufspaltung ergibt sich etwas kleiner, als wenn man nur die Wechselwirkung des Spins des Valenzelektrons mit dem elektrostatischen Feld aus Kern und abgeschlossener Schale berücksichtigt. Die Verminderung reicht aber längst nicht aus, um beim Cs die Umkehr der f-Dubletts zu erklären. *F. Hund.*

Wessel, W.: Sur la théorie quantique de l'interaction entre le rayonnement et la matière. Publ. Labor. Physique Univ. Coimbra **1**, 12—38 (1933).

Zusammenfassende Wiedergabe des Inhalts von drei Arbeiten des Verf. Z. Physik **67**, 54 (1931); **72**, 68 (1931); **76**, 337 (1932) (dies. Zbl. **1**, 37; **2**, 435; **4**, 379). *Peierls.*

Wick, G. C.: Über das magnetische Moment eines rotierenden Wasserstoffmoleküls. Z. Physik **85**, 25—28 (1933).

Bei der Messung des magnetischen Moments des Protons spielt das sogenannte „magnetische Rotationsmoment" eines Wasserstoffmoleküls eine wichtige Rolle. Letzteres wird hier theoretisch berechnet und mit dem Experiment verglichen. *Autoreferat.*

Adel, Arthur, and David M. Dennison: The infrared spectrum of carbon dioxide. Pt. I. Physic. Rev., II. s. **43**, 716—723 (1933).

Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der theoretischen Deutung des infraroten und Ramanspektrums von CO_2. Im Anschluß an frühere Arbeiten von Fermi und Dennison werden die Eigenschwingungen des Moleküls nach einer Störungsmethode untersucht. Die Störungsrechnung wird jetzt jedoch bis zur zweiten Näherung getrieben, indem die Verff. auch Glieder in der potentiellen Energie des Moleküls berücksichtigen, welche vom vierten Grade in den Koordinaten sind. Die 11 unbekannten Koeffizienten im Energieansatz werden dann so gewählt, daß 11 experimentell genau bestimmte Schwingungsniveaus mit den entsprechenden theoretischen Niveaus zusammenfallen. Da im ganzen 20 Schwingungsniveaus empirisch bekannt sind, kann die Brauchbarkeit der theoretischen Formeln an den übrigen 9 Niveaus geprüft werden. Es ergibt sich eine recht befriedigende Übereinstimmung. Es wird darauf hingewiesen, daß einige noch nicht beobachtete Banden, deren Lage berechnet wird, der Beobachtung zugänglich sein müssen. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Adel, Arthur, and David M. Dennison: The infrared spectrum of carbon dioxide. Pt. II. Physic. Rev., II. s. **44**, 99—104 (1933).

Erweiterung der im vorst. Referat besprochenen Untersuchung unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Kernschwingung und Kernrotation. Die Rotationsstruktur der infraroten CO_2-Banden erlaubt eine genauere Bestimmung der im Energieausdruck des Moleküls auftretenden Konstanten. Mit Hilfe der gefundenen Werte läßt sich die Konverganz in der Rotationsstruktur befriedigend deuten. Unter der Voraussetzung, daß die Energiefunktion vom Morseschen Typus ist, wird die zur Spaltung von CO_2 in CO und O erforderliche Dissoziationsenergie berechnet, die sich jedoch bis jetzt nicht mit experimentellen Daten vergleichen läßt. *R. de L. Kronig.*

Kassel, Louis S.: Mathematical methods for computing thermodynamic functions from spectroscopic data. J. chem. Phys. **1**, 576—585 (1933).

Zur Berechnung von „Zustandssummen" $\sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$ werden analytische Summationsmethoden ausgearbeitet; im einzelnen werden die Formeln angegeben für eine beliebige lineare Molekel und für eine Molekel, die sich wie ein symmetrischer Kreisel verhält. *F. Hund* (Leipzig).

Viney, Irine E.: The rotational specific heat of a polyatomic molecule for high temperatures — correction. Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 407 (1933).

Correction to Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 142 (1933) (this Zbl. **6**, 136). Asymptotic expansion for partition function should be, for the symmetrical top,

$$F(\sigma, \bar{\sigma}) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sigma}{4} + \frac{\bar{\sigma}}{3}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\sigma^3}{32} + \frac{\sigma^2\bar{\sigma}}{12} + \frac{\sigma\bar{\sigma}^2}{15}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha^3}\left(\frac{\sigma^5}{384} + \frac{\sigma^4\bar{\sigma}}{96} + \frac{\sigma^3\bar{\sigma}^2}{60} + \frac{4\sigma^2\bar{\sigma}^2}{315}\right) + O(\sigma^3, \bar{\sigma}^3) + \cdots\right],$$

and the corresponding rotational specific heat

$$C_{\mathrm{rot}}/R = \frac{3}{2} + \frac{1}{45}\frac{\sigma^2\bar{\sigma}^2}{\alpha^2} + O(\sigma^3, \bar{\sigma}^3) + \cdots,$$

in the notation of the original paper. *W. H. McCrea* (London).

Serber, Robert: The theory of depolarization, optical anisotropy, and the Kerr effect. Physic. Rev., II. s. **43**, 1003—1010 (1933).

Verf. diskutiert die Gültigkeitsgrenzen der Gansschen Beziehung zwischen dem Depolarisationsgrad des gestreuten Lichtes und der Kerrkonstanten auf Grund der klassischen und der Quantentheorie. *Placzek* (Kopenhagen).

Didlaukis, M.: Über die Energieverteilung diffundierender langsamer Elektronen. Z. Physik **82**, 709—715 (1933).

Es werden für die stationäre Wanderung langsamer Elektronen durch ein Gas im elektrischen Feld Beziehungen zwischen den Atomeigenschaften (freie Weglänge u. a.) und der Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron eine bestimmte Energie hat, aufgestellt. Ionisierungsstöße werden ausgeschlossen, da sie Berücksichtigung der elektrostatischen Wechselwirkung unter den Teilchen erfordern. Wenn nur elastische Stöße angenommen werden, ergibt sich eine Energieverteilung, die von der Maxwellschen beträchtlich abweicht und nur eine sehr geringe Breite besitzt. *Rump* (Erlangen).

Falkenhagen, H., und W. Fischer: Zur elektrostatischen Theorie der Frequenzabhängigkeit der Ionenbeweglichkeit und der Dielektrizitätskonstanten in gemischten Lösungen starker Elektrolyte. II. Verallgemeinerung der Bennewitz-Wagner-Küchlerschen Rechnungen auf den nichtstationären Fall. Physik. Z. **34**, 593—602 (1933).

Die in einer früheren Mitteilung der Verff. [Physik. Z. **33**, 941 (1932); dieses Zbl. **5**, 424] angegebene allgemeine Lösung für die Dispersion der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante von verdünnten Elektrolytgemischen wird unter Anwendung eines früher für den stationären Fall von Bennewitz, Wagner und Küchler entwickelten Näherungsverfahrens für den Fall diskutiert, daß ein binärer Grund-

elektrolyt eine kleine Menge eines binären Zusatzelektrolyten enthält. Das Ergebnis ist in qualitativer Übereinstimmung mit Messungen von Spaght. *E. Hückel.*

Széll, Koloman: Über die Statistik der zweiatomigen Gase. Z. Physik **84**, 112 bis 118 (1933).

Blake, F. C.: On the factors affecting the reflection intensities by the several methods of X-ray analysis of crystal structures. Rev. Modern Physics **5**, 169—202 (1933).

Zusammenfassender Bericht über die Theorie der Röntgenreflexion an Kristallen. Verschiedene Faktoren, welche die reflektierten Intensitäten bestimmen: Polarisationsfaktor, Lorentzfaktor, Temperaturfaktor, Einfluß der Absorption, Einfluß der endlichen Abmessungen der Atome (Formfaktor). Auswertung photometrischer Ergebnisse. Vergleich mit der Erfahrung für Metallpulver. Zerstreuung der Röntgenstrahlen im Gebiete der anomalen Dispersion (in der Nähe der Hauptkanten). Unter dieser Rubrik vermißt man die aufschlußreichen Versuche von Coster, Knol und Prins [Z. Physik **63**, 345 (1930)] über die Röntgenreflexion an Zinkblende sowie die Messungen von Coster und Knol [Z. Physik **75**, 340 (1932)] an Zink. *R. de L. Kronig* (Groningen).

● **Magnetismus. (Leipzig. Vortr. 1933.) Hrsg. v. P. Debye.** Leipzig: S. Hirzel 1933. VII, 110 S. u. 47 Fig. RM. 6.—.

Eine Reihe hervorragender Sachkenner aus Deutschland, England und Holland berichten über einige im Brennpunkt des Interesses stehende Fragen aus dem Gebiet des Magnetismus auf Grund ihrer teils experimentellen, teils theoretischen Forschungen. — Kapitza und Gerlach behandeln die durch ein Magnetfeld bewirkten Änderungen des elektrischen Widerstandes. Kapitza findet an nicht ferromagnetischen Metallen mit Hilfe seiner bekannten Methode bis zu den stärksten bisher erreichten Feldern eine mit dem Feld lineare Widerstandserhöhung, im Gegensatz zu den Erwartungen der Theorie; er bringt den Effekt in inneren Zusammenhang mit dem Zusatzwiderstand durch Gitterverzerrung. Gerlach hat mit seinen Mitarbeitern die Widerstandsänderung ferromagnetischer Stoffe in umfassenden Untersuchungen geklärt und die verwickelten Erscheinungen überzeugend in die Vorstellungen der Weissschen Theorie eingeordnet; die ferromagnetische Widerstandsänderung kommt wesentlich den Drehprozessen zu, während die Umklappprozesse effektfrei sind; in stärksten Feldern wird der Widerstand erniedrigt durch die Erhöhung der spontanen Magnetisierung. — Über die merkwürdigen und noch recht rätselhaften Beeinflussungen der Supraleitung durch ein Magnetfeld berichtet de Haas; seine neuen Versuche wurden zum Teil angeregt durch theoretische Bemerkungen, die kürzlich v. Laue zu diesem Gegenstand machte. — O. Stern und R. Frisch haben die magnetische Ablenkung von H_2-Molekularstrahlen gemessen, um so das magnetische Moment des Protons zu bestimmen; die Deutung wird kompliziert durch die Überlagerung des magnetischen Moments, das von der Rotation der Molekel herrührt; es ergeben sich überraschenderweise für das Proton mindestens 2 „Kernmagnetonen". — H. Sack hat mit einer hochempfindlichen Brückenanordnung die Beeinflussung der inneren Reibung von O_2-Gas durch ein Magnetfeld nachgewiesen und gemessen, angeregt durch Versuche von Senftleben, der eine analoge Änderung der Wärmeleitung von Sauerstoff fand. Theoretisch sind diese Wirkungen des Magnetfeldes auf ein paramagnetisches Gas noch nicht aufgeklärt. — Während diese Experimentaluntersuchungen größtenteils Fragen betrafen, die man zu den Grenzgebieten des Magnetismus rechnen kann, führen die 4 theoretischen Vorträge zu den Zentralproblemen des Magnetismus: Kramers bespricht den Paramagnetismus der Salze seltener Erden, ein Problem, dessen quantenmechanische Behandlung in den letzten Jahren außer von Kramers selbst und anderen, insbesondere von van Vleck, außerordentlich gefördert wurde; durch Einführung der statistischen Verteilung über die erreichbaren Energieniveaus einerseits, die Wirkung intrakristalliner elektrischer Felder andererseits konnte man vielfach auch die feineren Züge des empirischen Befundes wiedergeben. Kramers' Bericht führt die Grundzüge des Problems auf sehr allgemeine Aussagen hin, für die insbesondere die gerade oder ungerade Anzahl von Elektronen bei dem behandelten Ion maßgebend ist. Kramers bespricht weiterhin die paramagnetische Drehung der Polarisationsebene durch die Kristalle sowie das von Debye angeregte Verfahren, durch Entmagnetisierung von Salzen seltener Erden tiefste Temperaturen zu erreichen, das inzwischen zu beachtenswerten Erfolgen geführt hat. — Die 3 letzten Vorträge haben den Ferromagnetismus zum Gegenstand. H. Bethe berichtet über die von Heisenberg begründete Theorie, die den Ferromagnetismus auf die Gleichrichtung von Elektronenspins durch quantenmechanische Austauschkräfte zurückführt. Dieser Vorgang ist an bestimmte Elektronenkonfigurationen und an gewisse Abstände der beteiligten Atome im Gitter gebunden. Von der Möglichkeit, die hinreichenden Bedingungen für den Ferromagnetismus exakt zu formulieren, ist aber die Theorie noch weit entfernt. — Der technische Magnetisierungsvorgang, dessen Theorie R. Becker behandelt, besteht darin, daß der

Vektor der (durch Heisenbergs Theorie gedeuteten) „spontanen“ Magnetisierung aus den einerseits durch die Krystallanisotropie, andererseits durch elastische Gitterverzerrungen bestimmten Vorzugslagen in die Richtung des angelegten Magnetfeldes gezwungen wird, was durch 3 verschiedenartige Vorgänge erfolgen kann: die reversiblen und die irreversiblen Wandverschiebungen (Umklappprozesse) und die reversiblen Drehprozesse, die sich meist in verschiedenen Feldstärkenbereichen der Magnetisierungskurve vorzugsweise bemerkbar machen. — Die Energetik ferromagnetischer Stoffe behandelt der letzte Vortrag von R. Gans; er gibt einerseits eine nur auf formale Kristallsymmetriebedingungen gegründete energetische Berechnung der Magnetisierungskurven von Einkristallen, die den empirischen Befund überraschend gut darstellt, andererseits eine thermodynamische Behandlung der reversiblen und irreversiblen Wärmeumsetzungen in ferromagnetischen Körpern. *E. Vogt* (Marburg, Lahn).

Blochinzev, D., und L. Nordheim: Zur Theorie der anomalen magnetischen und thermoelektrischen Effekte in Metallen. Z. Physik 84, 168—194 (1933).

Die Theorie von Halleffekt, magnetischer Widerstandsänderung und Thomsoneffekt wird für zweiwertige Metalle unter gewissen naheliegenden Annahmen über die Eigenwertverteilung und unter einer sehr speziellen Hypothese über den Stoßmechanismus quantitativ durchgeführt. Dabei zeigt sich, daß die Bedingungen für ein anomales Vorzeichen des Thomsoneffekts und des Halleffekts keineswegs identisch sind, so daß — wie auch experimentell beobachtet — Fälle vorkommen können, in denen der eine der beiden Effekte normal, der andere anomal ist. Ferner folgt unter den gemachten Annahmen, daß der Halleffekt für große Felder verschwindet, während die Widerstandsänderung asymptotisch proportional H^2 wird. Die letzteren Resultate hängen jedoch mit den speziellen Voraussetzungen über den Stoßmechanismus zusammen. Die Voraussetzungen über die Eigenwertverteilung werden an dem Grenzfall schwacher Bindung illustriert, wo sie sich als richtig erweisen und wo die eingehenden Konstanten durch einen einzigen Parameter ausgedrückt werden können. *Peierls.*

Pauli, W.: Über die Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen. Helv. physica Acta 6, 279—286 (1933).

Durch eine Lorentztransformation wird aus der bekannten Formel für die Comptonstreuung an ruhenden Elektronen die entsprechende Streuformel für beliebig bewegte, freie Elektronen abgeleitet. Auch wenn durch geeignete Wahl des Streuwinkels die gestreute Frequenz ein festes Verhältnis zur einfallenden Frequenz hat, ergibt sich für beliebig hohe Frequenzen eine Abhängigkeit der Streuung von der Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen. *O. Klein* (Stockholm).

Casimir, H.: Über die Intensität der Streustrahlung gebundener Elektronen. Helv. physica Acta 6, 287—304 (1933).

Es wird ein für hohe Frequenzen gültiger Ausdruck für die Comptonstreuung an in einem Coulombfeld gebundene Elektronen abgeleitet, indem der Anfangszustand streng mittels der Diracschen, relativistischen Wellengleichung behandelt wird, während der Endzustand und der in den Rechnungen auftretende Zwischenzustand durch freie, ebene Elektronenwellen approximiert werden. *O. Klein* (Stockholm).

Voss, Wilhelm: Bedingungen für das Auftreten des Ramsauereffektes. Z. Physik 83, 581—618 (1933).

Der Ramsauereffekt, der darin besteht, daß der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen durch Atome bei abnehmender Elektronengeschwindigkeit ein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt, wurde schon öfters theoretisch behandelt; dabei wird das Atom als störendes Potentialfeld aufgefaßt. Ausgehend von denselben Annahmen versucht Verf. das Zustandekommen des Effektes mehr anschaulich zu verstehen. Für den Wirkungsquerschnitt gilt: W.Q. $= 4\pi/k^2 \sum (2l+1)\sin^2\delta_l$ (k Wellenzahl des Elektrons). Hier ist δ_l der Phasenunterschied im Unendlichen zwischen der exakten, zur Wellenzahl k und Impulsmoment $l \cdot h/2\pi$ gehörigen Lösung der Wellengleichung für das gegebene Potential und der Lösung für ein freies Elektron. Für $l >$ ein gewisses l_1 gibt es ein Gebiet, wo das Elektron sich klassisch befinden kann, für $l \leq l_1$ zwei solche, durch einen Potentialberg getrennte Gebiete. Für $l > l_1$ ist für kleine k $\delta_l \backsim 0$; für $l \leq l_1$ ist $\delta_l \backsim 0$ (oder $\backsim n\pi$) solange die Wahrscheinlich-

keit, daß ein von außen kommendes Elektron den Berg durchdringt, klein ist. Bei wachsendem k nimmt diese Wahrscheinlichkeit und damit δ_l schnell zu. Bei noch größeren k kann infolge des k^2 im Nenner der W.Q. wieder abnehmen. Dieser Sachverhalt wird zuerst qualitativ diskutiert, dann an einem einfachen Beispiel durchgerechnet und schließlich mittels des Wentzel-Kramers-Brillouinschen Näherungsverfahrens — das dabei erweitert wird für den Fall zweier benachbarter Umkehrpunkte — allgemein rechnerisch behandelt. Günstig für den R. E. ist ein nach außen scharf abgeschnittenes Potential (Edelgase). Zum Schluß wird gezeigt, wie man aus einer beobachteten Winkelverteilung die δ_l bestimmen kann; für Krypton findet Verf. Abweichungen, die er dem Austausch zuschreibt. *Casimir* (Zürich).

Geophysik, Meteorologie.

Higuchi, Seiichi: On the two-dimensional elastic wave due to the double sources of periodic disturbance. Technol. Rep. Tôhoku Univ. Sendai **10**, 495—505 (1932).

The author solves the two dimensional problem of amplitudes and stresses generated in an infinite medium by a pair of equal pulsating sources centered at $(0, \pm 1)$. The potential of each source is $\Phi = H_0^{(2)}(hr)\, e^{ipt}$, [c/o Lamb: Trans. Roy. Soc. London **203** (1904)]. The problem is transposed to the curvilinear coordinate system $\xi = \frac{r_1 + r_2}{2}$, $\eta = \frac{r_1 - r_2}{2}$, where r_1 and r_2 are the radii vectors from the centers $(0, \pm 1)$. An example for a medium having the elastic constants of steel is solved in numerical detail. The displacements vary as $\xi^{-1/2}$ near the source, and as ξ^{-1} at greater distances. The results at points within a radius of 50 to 100 units are essentially independent of frequency for frequencies less than 100 (i. e. in the earth quake range). The normal stresses $\widehat{\xi\xi}$ and $\widehat{\eta\eta}$ are nearly equal at distances 2.5 or greater from the cartesian origin. The component displacements at such distances are practical independent of angular position. In other words, the wave at these distances behaves like one from a single source. *L. B. Slichter* (Cambridge, Mass.).$_\circ$

Petterssen, Sverre: Kinematical and dynamical properties of the field of pressure with application to weather forecasting. Norske Vid. Akad., Geofys. Publ. **10**, Nr 2, 1—92 (1933).

Verf. gibt eine durch eigene Untersuchungen erweiterte zusammenfassende Darstellung der zuerst von Angervo entwickelten Methode der Vorausberechnung der Veränderungen des Luftdruckfeldes $p(x, y, t)$ an der Erdoberfläche (x, y) in der Zeit t, die im Prinzip auf Extrapolationsformeln vom Typus der Taylorentwicklung

$$p = \sum_0^\infty \frac{1}{l!\, m!\, n!}\, p_{lmn} \cdot x^l y^m t^n \qquad \left(p_{lmn} = \frac{\partial^{l+m+n} p}{\partial x^l \partial y^m \partial t^n}\right)$$

beruht, wobei die p_{lmn} aus den Isobaren- und Isallobaren- („Luftdrucksänderungs"-) Karten nach den Methoden der Differenzenrechnung bestimmt werden. Die Spezialisierung auf charakteristische, analytische Vereinfachungen wie z. B. $p_{100} = p_{010} = 0$ gestattende Isobarenformen (Hoch- und Tiefdruckkerne, Rinnen tiefen Drucks, Hochdruckkeile) ermöglicht die Aufstellung handlicher Formeln für prognostische Zwecke; es ergibt sich beispielsweise die Normalkomponente der Verlagerungsgeschwindigkeit der Isobaren aus $v_x = -p_{001}/p_{100}$, wenn das Koordinatensystem nach $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ orientiert wird, die entsprechende Verlagerung der Isallobaren zu $V_x = -p_{002}/p_{101}$, die Beschleunigung der Isobaren zu $a_x = -(p_{002} - 2\, v_x\, p_{101} + v_x^2\, p_{200})/p_{100}$ usw. Nach Ableitung der allgemeinen Formeln werden zahlreiche prognostische Anwendungen gegeben, in denen die Verlagerungen von Isobaren, Isallobaren und atmosphärischen Fronten, ferner das Ausfüllen und Vertiefen von Depressionen behandelt werden.

H. Ertel (Berlin).$_\circ$
